



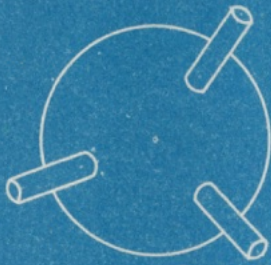
立休回路に關する一般論の試み

朝永振一郎

立体回路に関する一般論の試み

朝永振一郎 (昭和十九年七月廿日)

導波管(或は共軸ケーブル、二線回路でもよい)を口として有つ第一図の様な回路があったとする。この口の各々を通じて出入する波の振幅や位相を論ずる事が立体回路論の一の問題であらう。この種の問題を個々の場合に付與られた回路の諸条件即ち其の形状や寸法、駆動の方法等に相当した境界条件のもとにMaxwellの方程式を解けば問題が解けた事になる。



第一図

然し個々の問題を個々の場合に解く前に一般般の見通しを得る目的で通常の線路の理論に於ける様に何か一般的な着眼の仕方を立て置き出来ないのであらうか。

そうすればうまく行くなれば複雑な「パラメーター」の事、実験事実を適當に整理したり理論的計算を行う時、諸元を減じて労力の節約が出来たりする事になるが、矢張りない。

通常の回路網の理論では「インピーダンス」といふ、便利な概念を用ひて此の種々の一般的回路論が展開されてゐる而して立体回路の場合にも或る程度此の概念が其の儘適用されて実用に可成役立ってゐる様である而して問題に依つては「インピーダンス」の概念は處理出来ないものに當面せねばならぬのではないかと素人考へて想像される。そこで素人ながら盲目蛇におかず一つの試みを行つて見た。

其の理論の立て方は物理学畑の讀者は直ちに気付かれる様に核

反應を處理する方法を其の儘持つて来たのであつて以下の数学形式は、Breiaの論文(G. Breia: P. R. Vol. 58(1940), 1068—1074)を換骨脱胎したものである。然し此處に書上げて見ると得られた理論はあまり見通しの上いものではないので實用になるかどうか疑いがある。若し勝手な問題を正々矢鱈に一般化し、徒に数学を弄んでおるとすれば或は戦時研究に相應しくない、迂遠な事をやつておるとすれば御許原頁をたい。

§1 一般的準備

電界や磁界は時間に対して $e^{-i\omega t}$ の形をしてゐるものとする。但し角周波数 ω は複素数を考へる事もある。其の時 Maxwell の方程式

$$\begin{aligned} \text{rot } E &= -\mu \frac{\partial H}{\partial t} \\ \text{rot } H &= \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.1)$$

は

$$\begin{aligned} \text{rot } E &= i\omega \mu H \\ \text{rot } H &= -i\omega \epsilon E \end{aligned} \quad (1.2)$$

となる

第一図の様な回路があつたと考へて各々の導波管の部分に於て、z 軸の方向に而し、縦向に z 軸を探り、それに直角に x, y 軸を考へる。以下此の管口に對して suffix N で一般的に示す番号を付ける。N 番目の導波管中 z 上の様に取つた坐標を x, y, z 等と書ふ。

一つの管口に着すると此處で (1.2) は特殊解として

$$\begin{aligned} E_z^+ &= F_z^+(x, y) e^{ik_z z} \\ H_z^+ &= G_z^+(x, y) e^{ik_z z} \end{aligned} \quad (1.3)$$

或は

$$\begin{aligned} E_z^- &= F_z^-(x, y) e^{-ik_z z} \\ H_z^- &= G_z^-(x, y) e^{-ik_z z} \end{aligned} \quad (1.4)$$

の形のものをしてゐる。但し茲に F とか G とかいは、

$$\begin{aligned} F_{lx}^\pm &= i\sqrt{2} \omega \sqrt{\frac{\mu}{k_z}} \frac{\partial U_l}{\partial x} & G_{lx}^\pm &= -i\sqrt{2} \omega \sqrt{\frac{\epsilon}{k_z}} \frac{\partial U_l}{\partial y} \\ F_{ly}^\pm &= \pm i\sqrt{2} \sqrt{\frac{k_z}{\epsilon}} \frac{\partial U_l}{\partial y} & G_{ly}^\pm &= i\sqrt{2} \omega \sqrt{\frac{\epsilon}{k_z}} \frac{\partial U_l}{\partial x} \\ F_{lz}^\pm &= \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{\epsilon k_z}} (-k_z^2 + \omega^2 \mu \epsilon) U_l & G_{lz}^\pm &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

(以上所謂 E 波) 或は

$$\begin{aligned} F_{lx}^\pm &= i\sqrt{2} \omega \sqrt{\frac{\mu}{k_z}} \frac{\partial U_l}{\partial y} & G_{lx}^\pm &= \pm i\sqrt{2} \sqrt{\frac{k_z}{\mu}} \frac{\partial U_l}{\partial x} \end{aligned}$$

$$F_{ey}^{\pm} = -i\sqrt{2} \omega \sqrt{\frac{\mu}{k_L}} \frac{\partial U_L}{\partial x}$$

$$F_{ez}^{\pm} = 0$$

$$G_{ey}^{\pm} = \pm i\sqrt{2} \sqrt{\frac{k_L}{\mu}} \frac{\partial U_L}{\partial y} \quad (1.6)$$

$$G_{ez}^{\pm} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{\mu k_L}} (-k_L^2 + \omega^2 \mu \epsilon) U_L$$

(所謂H波)

の解のものであつて、 U_L とは x, y の関数で

$$\frac{\partial^2 U_L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_L}{\partial y^2} + x_L^2 U_L = 0 \quad (1.7)$$

の固有解である。その時間問題となる境界条件は(1.5)即ちE-波に對しては

管の切口の境界での法線をとると

$$U_L(x, y) |_{\text{境界}} = 0 \quad (1.8)$$

である(1.6)即ちH-波に對しては境界での法線をとると

$$\frac{\partial U_L(x, y)}{\partial n} |_{\text{境界}} = 0 \quad (1.9)$$

である。(1.3), (1.4), (1.5), (1.6)中に現れてゐる k_L は

$$k_L = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - x_L^2} \quad (1.10)$$

で與へられるものであるが、茲で $\sqrt{\quad}$ の二値性に對して $\omega^2 \mu \epsilon - x_L^2$ が正の実数の時 k_L が正の実数になる様にとるものと約束して置く。縱つて $\omega^2 \mu \epsilon - x_L^2$ が一般に複素数の時には k_L のargumentは $\omega^2 \mu \epsilon - x_L^2$ のそれの半分にとるべきである。z軸の方向は外向にとつてあるから

E^+ といふ風に(+)の添字の付いた波は口から外に出る波、 E^-

H^- といふ風に(-)の添字の付いた波は口から内に入る波である

U_L の規準化に就ては管の截口 S についての積分に對し

$$\int_S \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy = 1 \quad (1.11)$$

が成立する様にして置くのが便利である。

波としてE-波とH-波とがあるから本當は波の姿態を表

はすめにし、他にEとかHとかの添字を用ひてE-波ならば E_{EL} ,

H_{EL} といふ風にH-波ならば E_{HL} , H_{HL} といふ風にしなければなら

ないのだが、此の記法ではごたごたするから、その代りに以下我々は

E-波にしては偶数の l を用ひH-波にしては奇数の l を用ひるといふ、風にする。

此處で W を(1.11)の様 に規準化する事の物理的意味を着るために(1.3)又は(1.4)で表はされる波に由つて導波管中を運ばれる「エネルギー」を計算してみる。Poyntingの理論に由つて単位時間に管を通じて流れる「エネルギー」は

$$S = \frac{1}{4} \int_S \{ [E \times H^*]_n + [E^* \times H]_n \} ds \quad (1.12)$$

である。但し茲に積分は導波管の截口に沿つて行つた面積分である n はその面に直角な法線を意味する。こゝ(1.12)の中の E, H に

(1.3)又は(1.4)を代入し(1.5)や(1.6)を用ひて積分を行ふと

$$S = \omega \int_S \{ (\frac{\partial W}{\partial x})^2 + (\frac{\partial W}{\partial y})^2 \} ds \quad (1.13)$$

を得る従つて(1.11)の様 に W が規準化されておるといふ事は此の波に由つて一周期の間に運ばれる「エネルギー」が單位量である事を意味する事になる。以上は導波管の理論の繰返してある而して共軸同軸「ケーブル」や二線路等導波管の特殊な場合と考へれば矢張り上の形式が成立してゐる筈である。

拘へ斯様に導波管中の特殊解が各管口に就つて知られてゐるものとすれば第一回の様な回路中に ω なる周波数の振動が起つておる時に一般に N 番目の導波管中には

$$E(x_N, y_N, z_N) = \sum_l \{ a_l^N F^-(x_N, y_N) e^{-ik_l^N z_N} + b_l^N F^+(x_N, y_N) e^{+ik_l^N z_N} \}$$

$$H(x_N, y_N, z_N) = \sum_l \{ a_l^N G^-(x_N, y_N) e^{-ik_l^N z_N} + b_l^N G^+(x_N, y_N) e^{+ik_l^N z_N} \} \quad (1.14)$$

なる形の波が存在してゐる筈である。但し各々の導波管中での係数 a_l, b_l は各管口に於ける與へられた境界条件(即ち駆動方法や荷重の與へ方)で定むべきものである。

此の管口条件は問題の種類に應じて種々考へられるけれど

その中最も単純、基本的なものとして次の様なものが考へられる。それは一つの管口(それを N としておく)が一つの姿態(それを l としておく)の単純な単任振幅の波だけが入射して居り且つ他の管口から入射がないとする。その時始めの管口 N に反射して出来る波及他の管口に空洞を透過して出来る波は如何といふ問題である。

この問題を上に基本的と言つた訳は N と l とを凡てに付てこの問題が解けておると、他のもつと複雑な管口条件を有する問題は一方程式を解く事なく此の基本的な解から代数的な操作で得譯が出来るからである。其の例は後に示す。

§2 特性「マトリックス」(假称)の導入

我々は要素的な問題としてある一つの口から振幅 Π の或る一つの姿態の波だけが入射し、他の口からは何れも入射波が無い時に夫々の口から如何なる波が出てゐるかといふ問題をとつた。此の要素的な問題を解いて N 番目の口から単位振幅の波が入射した時(且つ他の入射は一つもない時) N 番目の口から出る l' 波の振幅が得られるものとする。それを

$$a_{l'l}^{N'N} \quad (2.1)$$

と書く事とする。この $a_{l'l}^{N'N}$ の定義から、 N' 口の中の電磁界は(但し $N'=1, 2, \dots, N'-1, N, N+1, \dots$)

$$E_{\mathbf{r}}^N(x_N, y_N, z_N) = \sum_{l'} \{ \delta_{Nl'} \delta_{l'l} F^-(x_N, y_N) e^{-ik_l^{N'} z_N} + a_{l'l}^{N'N} F^+(x_N, y_N) e^{+ik_l^{N'} z_N} \} H_{\mathbf{r}}^N(x_N, y_N, z_N) = \dots \quad (2.2)$$

で與へられる事になる。*茲に E と H とに二つの添字 N, l を付たのは N 口から l 波を入射せしめた時の電磁界といふ意味である。

実際に $a_{l'l}^{N'N}$ を求めるには与へられた回路に付いて、上の基本的な管口条件のもとで先づ(1.1)を解かねばならない。而し此の要素的な問題を一度解いて $a_{l'l}^{N'N}$ を凡ての N, N', l, l' に付いて求めて置くと、他のより複雑な管口条件を有する問題の解も得られる事になるので、此の $a_{l'l}^{N'N}$ の集りの中に此の回路の特性が凡て含まれてゐると考へてよい。其處で此の $a_{l'l}^{N'N}$ の集りから出来る「マトリックス」

$$\| a_{l'l}^{N'N} \| = A \quad (2.3)$$

を此の回路の特性「マトリックス」と假に名付けて此の特性「マトリックス」と云ふ。もつて一般的な回路論を立て見たらどうかと思ふのである。与へられた回路の特性「マトリックス」を求めるには方程式(1.1)を上記の要素的な問題について解かねばならない。此の問題は回路論の

各論の中に入れて此處では其れには觸れなれ、以下論ずる所は俱
實際解く事なしに得られる A の一般的性質に就いてある。

§3 特性「マトリックス」の一般的構造

「マトリックス」Aの一般的構造を調べるには次の二つの定理を用ひる

E と H とを Maxwellの方程式

$$\begin{aligned} \text{rot } E &= i\omega\mu H \\ \text{rot } H &= -i\omega\varepsilon E \end{aligned} \tag{3.1}$$

の二つの角解とし、 E' 及び H' を

$$\begin{aligned} \text{rot } E' &= i\omega'\mu H' \\ \text{rot } H' &= -i\omega'\varepsilon E' \end{aligned} \tag{3.2}$$

の一つの解とする。此處で ω と ω' とは実数でも複素数でもよい。又場合によつて $\omega = \omega'$ の事もある。其の時の次の定理が成立つ

第一定理

$$\begin{aligned} \int_S \{ (E \times H')_n - (E' \times H)_n \} dS \\ = i(\omega - \omega') \int_V \{ \mu(H' \cdot H) - \varepsilon(E' \cdot E) \} dV \end{aligned} \tag{3.3}$$

但しこの式の左辺の積分は任意の閉面 S に就いての面積分であり、右辺の積分は其の閉面で圍れた体積 V の中で取つた容積積分である。添字 n には面 S に對する外向の法線を意味する

第二定理

$$\begin{aligned} \int_S \{ (E \times H'^*)_n + (E'^* \times H)_n \} dS \\ = i(\omega - \omega'^*) \int_V \{ \mu(H'^* \cdot H) + \varepsilon(E'^* \cdot E) \} dV \end{aligned} \tag{3.4}$$

但し $*$ は共軛複素数を意味する

其處で E, F として E_ℓ^N, H_ℓ^N を用ひ E', H' として $E_\ell^{N'}, H_\ell^{N'}$ を用ひて第一定理を適用して見る。(此の時 $\omega = \omega'$ として)而して面 S としては回路の内壁と導波管を何處で直角に截る面とで作つた閉面を用ひる。斯く壁面 T は $(E \times H')_n = (E' \times H)_n = 0$

であるから、左辺の積分としては導波管の截口面だけを取ればよい事

に於て斯く考へて(2.2)を(3.3)に用ひて $w = w'$ である事から

$$\sum_{N''} \sum_{l''} \sum_{l'''} \int_S \{ (\delta_{l'' l'''} \delta_{N'' N'''} F_{l''}^- e^{-ik_{l''}^{N''} z''} + a_{l'' l'''}^{N'' N'''} F_{l''}^+ e^{ik_{l''}^{N''} z''}) \times \\ (\delta_{l'' l'''} \delta_{N'' N'''} F_{l''}^- e^{-ik_{l''}^{N''} z''} + a_{l'' l'''}^{N'' N'''} G_{l''}^+ e^{ik_{l''}^{N''} z''}) \}_n \\ - (\delta_{l'' l'''} \delta_{N'' N'''} F_{l''}^- e^{-ik_{l''}^{N''} z''} + a_{l'' l'''}^{N'' N'''} F_{l''}^+ e^{ik_{l''}^{N''} z''}) \times \\ (\delta_{l'' l'''} \delta_{N'' N'''} G_{l''}^- e^{-ik_{l''}^{N''} z''} + a_{l'' l'''}^{N'' N'''} G_{l''}^+ e^{ik_{l''}^{N''} z''}) \}_n \} dx'' dy'' = 0 \quad (3.5)$$

但し x'', y'', z'' と書いたのは本當は $x_{N''}, y_{N''}, z_{N''}$ と書くべきものである。

(3.5)に於て F や G に(1.5)(1.6)を用ひ固有函数 U_l の直交性を考慮すると
先づ $\int dx'' dy''$ を行つた結果として(3.5)の組数中 $l'' \neq l'''$ の項は
0になる事がわかる而して U_l が(1.11)の様には規準化してあると $l'' = l'''$ の項
に對しては

$$\int [F_{l''}^+ \times G_{l''}^+]_n dS = -2w \\ \int [F_{l''}^+ \times G_{l''}^-]_n dS = -(-1)^l 2w \\ \int [F_{l''}^- \times G_{l''}^-]_n dS = (-1)^l 2w \\ \int [F_{l''}^- \times G_{l''}^+]_n dS = 2w \quad (3.6)$$

が得られる事を用ひて(3.5)は簡單に

$$2w \{ a_{l' N'}^{N' N'} - a_{l' l'}^{N' N'} \} = 0 \quad (3.7)$$

となる

w は0でないから(3.7)は

$$a_{l' l'}^{N' N'} = a_{l' N'}^{N' N'} \quad (3.8)$$

と書いてよい

斯して「マトリックス」 A は對称「マトリックス」であると云ふ結論が得られた。

この事實の物理的内容を文章で言ふならば

「 N 口から單位振幅の l 波が入射した時(他の入射は一つもない) N 口から出る l' 波の振幅は、 N' 口から單位振幅の l' 波が入射した時(他の入射は一つもない) N 口から出る l 波の振幅に等しい」と云ふ事に

なる。即ち：これはよく知られた相互関係に外ならない。此のAの対称性はWが実数であつても無くても一般的に成立する。斯して第一定理から「マトリックス」Aの対称性が得られた。次に第二定理を用ひて見る。即ち(3.4)に於て再びE, Hとして E_l^N, H_l^N と $E_l^{N'}, H_l^{N'}$ を用ひる。而して矢張 $W=W'$ とし、而もこの場合にはWが実数であるものとする。而る時は

$$\begin{aligned} & \delta_{l'l} \delta_{N'N} \left(\frac{\sqrt{K_l^{N'}}}{\sqrt{K_l^{N'}} + \sqrt{K_l^N}} + \frac{\sqrt{K_l^N}}{\sqrt{K_l^{N'}} + \sqrt{K_l^N}} \right) e^{-i(K_l^N - K_l^{N'})z} - a_{l'l}^{N'N} \left(\frac{\sqrt{K_l^{N'}}}{\sqrt{K_l^{N'}}} - \frac{\sqrt{K_l^N}}{\sqrt{K_l^N}} \right) e^{i(K_l^{N'} + K_l^N)z} \\ & + a_{l'l}^{N'N'} \left(\frac{\sqrt{K_l^N}}{\sqrt{K_l^N}} - \frac{\sqrt{K_l^{N'}}}{\sqrt{K_l^{N'}}} \right) e^{-i(K_l^N + K_l^{N'})z} - \sum_{N''} \sum_{l''} a_{l'l''}^{*N'N''} a_{l''l}^{N''N} \left(\frac{\sqrt{K_{l''}^{N''}}}{\sqrt{K_{l''}^{N''}}} + \frac{\sqrt{K_{l''}^{N''}}}{\sqrt{K_{l''}^{N''}}} \right) e^{i(K_{l''}^{N''} - K_{l''}^{N''})z} \\ & = 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

なる関係を有する。色々な姿態の波の中でCut offされたものと、Cut offされないものとを区別すると(3.9)の関係は幾つかの関係に分れる。即ち此處である姿態がCut offされる波である事を示すのに添字lの上に一を付けて \bar{l} の様にして表はし、それが對して何も付けないlはcut offされない波を表はすものとする。と $K_{\bar{l}}$ は純虚数、 K_l は実数になる事に注意して、(3.9)は

$$\begin{aligned} & \delta_{l\bar{l}} \delta_{N'N} - \sum_{N''} \sum_{l''} a_{l'l''}^{*N'N''} a_{l''\bar{l}}^{N''N} = 0 \\ & -i a_{l\bar{l}}^{N'N} - \sum_{N''} \sum_{l''} a_{l'l''}^{*N'N''} a_{l''\bar{l}}^{N''N} = 0 \\ & i a_{\bar{l}l}^{N'N'} - \sum_{N''} \sum_{l''} a_{\bar{l}l''}^{*N'N''} a_{l''l}^{N''N'} = 0 \\ & -i a_{\bar{l}l}^{N'N'} + i a_{\bar{l}l}^{*N'N'} - \sum_{N''} \sum_{l''} a_{\bar{l}l''}^{*N'N''} a_{l''l}^{N''N'} = 0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

なる四つの関係に分れる。若し空洞から管口迄の長さが十分長いならばCut offされた波は實際上問題にならないから棒附の添字を持ったaは凡て0としてよい。其の場合には、A「マトリックス」の代りに棒無しaを有つ「マトリックス」要素だけを取つた部分「マトリックス」で十分話が済ませる。其の場合には(3.10)の

第一式だけが問題になる訳である。所で此の(3.10)の第一式は A -matrix が Unitär であると思ふ事を意味してゐる。

以下管口が十分長い時に問題を限定して置く。そうでない場合にも A -matrix を用ひて一般論を作る事が出来ると思ふけれども始めは先づ簡単な場合をやつて必要が起つてから一般化を行ふ方が賢い様に思はれる。 A -matrix が Unitär であると思ふ事の物理的意味

としては先づ(3.10)式に於て $l=l', N=N'$ と取つて得られる関係即ち

$$\sum_{N''} \sum_{l''} a_{ll''}^{*N''} a_{l''l}^{N''} = 1 \quad (3.11)$$

の関係は「エネルギー」保存を表はすものである。(3.10)に含まれた他の関係

$$\sum_{N''} \sum_{l''} a_{l'l''}^{*N''} a_{l''l}^{N''} = 0 \quad (N' \neq N, l' \neq l \text{ が同時}) \quad (3.12)$$

(に成立せぬ時)

は其れ程直観的な意味が附けられないか又は色々な姿態の波が重疊してゐる時に流れて行く「エネルギー」が波の干渉とは無関係に單純に個々の波によつて運ばれると考へられる「エネルギー」流の重疊と考へられる事を意味してゐる。(3.11)が「エネルギー」保存を意味すると云つた事も少し詳しく述べると、(3.11)の右辺は振幅1で入射した波によつて回路中に持ち込まれる「エネルギー」を意味し左辺の

$$a_{ll''}^{*N''} a_{l''l}^{N''} (= |a_{l''l}^{N''}|^2) \quad (3.13)$$

は其の時 N'' 口から l'' 波として外に出て行く「エネルギー」を表はすものであつて(3.11)は即ち流入する「エネルギー」と流出する「エネルギー」の「バランス」を出してゐるものである。