導波管ノ曲リノ理論

高橋秀俊

一般論

座標

座標ハ管ノ曲リニ沿ウテ曲線座標ヲ取ル.

管ノ直截面ヲ xy 平面 $(z=\mathrm{const.})$ トナシ, コレニ垂直ニ z 軸ヲ取ル.

即チ z 軸ハ管ノ曲リニ從ッテ曲リ, 管壁ハ常ニ z 軸ニ沿ウテヰル 又 x 軸 y 軸ハ通常ノ直角座標トシ, 又曲リハ常ニ x 方向ニ曲リ z 軸ハ一平面 (xz 平面) 上ニアルモノトスル. (コノ假定ハ必ズシモ必要デハナイ. 一般ニ xy 両方向ニ曲ル場合ノ式モ簡單デアル)
然ラバコノ曲線座標ニ於ケル線素 ds ハ

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + (1+\alpha x)^2 dz^2$$

デ與ヘラレル. 但シ α ハ曲率デ, 一般ニ z ノ函数デアル. コノ場合ノ一ツノ Vektor ノ廻轉ノ表現ハ

$$\begin{cases} (\mathrm{rot}\,A)_x = (\mathrm{rot}_0 A)_x + \dfrac{\alpha x}{1+\alpha x}\dfrac{\partial A_y}{\partial z} \\ (\mathrm{rot}\,A)_y = (\mathrm{rot}_0 A)_y - \dfrac{\alpha x}{1+\alpha x}\dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\alpha}{1+\alpha x}A_z \\ (\mathrm{rot}\,A)_z = (\mathrm{rot}_0 A)_z \end{cases} \tag{1}$$

但シ $\mathrm{rot}_0 A$ ハ直交座標ノトキノ rot ノ表現ヲソノマヽ形式的ニ A ニ行ッタモノヲ示ス. 又体積素 dV ハ

$$dV = (1+\alpha x)\,dx\,dy\,dz \tag{2}$$

基礎方程式

然ラバ, 導波管中ノ電界 E, 磁界 H ニ対スル基礎方程式ハ

$$j\omega\varepsilon E = \mathrm{rot}\,H, \qquad -j\omega\mu H = \mathrm{rot}\,E \tag{3}$$

デアル. 所デコレヲ各種ノ固有波型 (normal mode) ニ分解スルタメ, コレニ別ニ假想的ナ電磁界 E_0, H_0 ヲ考ヘル. コレハ (3) ヲ満足シナイデ, カハリニ

$$j\omega\varepsilon E_0 = \mathrm{rot}_0 H_0, \qquad -j\omega\mu H_0 = \mathrm{rot}_0 E_0 \tag{4}$$

ヲ満足スル. 即チ E_0, H_0 ハ恰カモ導波管ガ眞直ダッタ場合ニ

ミタスベキ方程式ヲミタスカラ、反射等ノコトハオコラズ。(4)ノ解ハ矩形，円等ノ断面ノ場合ハ既ニ知ラレタモノデアル．

(3)，(4)ニヨリ

$$0=\int(\mathbb{E}\,\mathrm{rot}_0\mathbb{H}_0-\mathbb{E}_0\,\mathrm{rot}\,\mathbb{H}+\mathbb{H}\,\mathrm{rot}_0\mathbb{E}_0-\mathbb{H}_0\,\mathrm{rot}\,\mathbb{E})\,dV$$

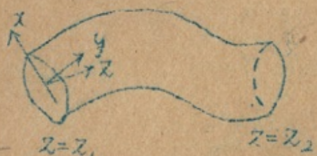
Vektor解析ノ公式ニヨリ

$$=\int\left(\mathrm{div}(\mathbb{H}_0\times\mathbb{E})+\mathrm{div}(\mathbb{E}_0\times\mathbb{H})+\mathbb{H}(\mathrm{rot}_0\mathbb{E}_0-\mathrm{rot}\,\mathbb{E}_0)+\mathbb{E}(\mathrm{rot}_0\mathbb{H}_0-\mathrm{rot}\,\mathbb{H}_0)\right)dV$$

Greenノ定理ニヨリ

$$=\int(\mathbb{H}_0\times\mathbb{E}+\mathbb{E}_0\times\mathbb{H})\,\mathfrak{n}\,dS-\int\left\{\mathbb{H}(\mathrm{rot}\,\mathbb{E}_0-\mathrm{rot}_0\mathbb{E}_0)+\mathbb{E}(\mathrm{rot}\,\mathbb{H}_0-\mathrm{rot}_0\mathbb{H}_0)\right\}dV \qquad (5)$$

コノ積分ヲ　$z=z_1$，$z=z_2$ 及ビ管壁デ囲マレタ体積デ行ヘバ，



$\int\cdots\mathfrak{n}\,dS$ ハソノ表面ニ於ケル法線成分ノ積分デアルガ，$\mathbb{E}$ 及ビ $\mathbb{E}_0$ ハ何レモ壁ニ平行デ，従ッテコノ部分ノ面積分ハ消エル．　故ニ

$$\int(\mathbb{H}_0\times\mathbb{E}+\mathbb{E}_0\times\mathbb{H})\,\mathfrak{n}\,dS=\left[\iint\left\{(\mathbb{H}_0\times\mathbb{E})_z+(\mathbb{E}_0\times\mathbb{H})_z\right\}dx\,dy\right]_{z=z_1}^{z=z_2} \qquad (6)$$

又 (1)，(2) ニヨリ

$$\int\left\{\mathbb{H}(\mathrm{rot}\,\mathbb{E}_0-\mathrm{rot}_0\mathbb{E}_0)+\mathbb{E}(\mathrm{rot}\,\mathbb{H}_0-\mathrm{rot}_0\mathbb{H}_0)\right\}dV$$
$$=\iiint\alpha\left\{x\left(H_x\frac{\partial E_{0y}}{\partial z}-H_y\frac{\partial E_{0x}}{\partial z}+E_x\frac{\partial H_{0y}}{\partial z}-E_y\frac{\partial H_{0x}}{\partial z}\right)-H_yE_{0z}-E_yH_{0z}\right\}dx\,dy\,dz \qquad (7)$$

コレヲ等置シテ

$$\left[\iint(H_{0x}E_y-H_{0y}E_x+E_{0x}H_y-E_{0y}H_x)\,dx\,dy\right]_{z=z_1}^{z=z_2}$$
$$=\iiint_{z_1}^{z_2}\alpha\left\{x\left(H_x\frac{\partial E_{0y}}{\partial z}-H_y\frac{\partial E_{0x}}{\partial z}+E_x\frac{\partial H_{0y}}{\partial z}-E_y\frac{\partial H_{0x}}{\partial z}\right)-H_yE_{0z}-E_yH_{0z}\right\}dx\,dy\,dz \qquad (8)$$

コレガコノ理論ノ基礎方程式デアル．コソマデハ何等省略ヲ行ッテ居ナイカラ厳密ナ式デアル．

標準波型(normal mode)ヘノ分解

$z=z_0$ ヲ導波管ノ任意ノ直截平面トスルト、ソノ上デハ $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ ノ値ハコレヲ標準波型ニ分解スルコトガデキル。即チ

$$\mathbf{E}=\sum A_n \mathbf{E}^n+\sum A_{n*} \mathbf{E}^{n*}$$
$$\mathbf{H}=\sum A_n \mathbf{H}^n+\sum A_{n*} \mathbf{H}^{n*} \tag{9}$$

コヽニ $\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^n$ ハ z ノ正方向ヘ進ム波 即チ、位相因数ガ $e^{-\gamma z}$ 又ハ $e^{-j\beta z}$, 但シ $\gamma>0$ 又ハ $\beta>0$ ナル標準波型ノ $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ ノ位相因子ヲ取リ除イタモノヲ示ス(位相因子ハ A_n ノ方ニ含マセル)

又 $\mathbf{E}^{n*}, \mathbf{H}^{n*}$ ハ

$$E_x^{n*}=E_x^n \qquad H_x^{n*}=-H_x^n$$
$$E_y^{n*}=E_y^n \qquad H_y^{n*}=-H_y^n \tag{10}$$
$$E_z^{n*}=-E_z^n \qquad H_z^{n*}=H_z^n$$

一般ニ $*$ ヲツケタモノハ $E_z; H_x, H_y$ ノ符号ヲ変ヘ、他ノ三成分ハソノマヽニシタモノヲ示スコトニ定メル。

然ラバ $\mathbf{E}^{n*}, \mathbf{H}^{n*}$ ハ z ノ負方向ヘ進ム波ヲアラハス

サラ、ソノ $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ ハ次ノ如キ一種ノ直交関係ヲ有スル

$$\iint(\mathbf{E}^m \times \mathbf{H}^n)_z\,dx\,dy \equiv \iint(E_x^m H_y^n-E_y^m H_x^n)\,dx\,dy=0 \tag{11}$$

故ニ
$$\iint(E_x^n H_y^n-E_y^n H_x^n)\,dx\,dy=1 \tag{12}$$

トナル様ニ $\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^n$ ヲ規格化(normieren)スレバ A_n, A_{n*} ハ

$$A_n=\frac{1}{2}\iint(E_x H_y^n-E_y H_x^n+E_x^n H_y-E_y^n H_x)\,dx\,dy$$
$$A_{n*}=\frac{1}{2}\iint(E_x H_y^n-E_y H_x^n-E_x^n H_y+E_y^n H_x)\,dx\,dy \tag{13}$$

ニテ與ヘラレル。A_n, A_{n*} ハ z ノ函数デアル。ソコデ(8)ニ於イテ $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ ヲ分解シ、又

$$\mathbf{E}_0=\mathbf{E}^{n*}e^{\gamma_n z}, \qquad \mathbf{H}_0=\mathbf{H}^{n*}e^{\gamma_n z} \tag{14}$$

ト置ケバ

$$A_n(z_2)e^{\gamma_n z_2}-A_n(z_1)e^{\gamma_n z_1}$$
$$=\int_{z_1}^{z_2}\alpha(z)\,e^{\gamma_n z}\sum\left\{(m,n)A_m(z)+(m^*,n)A_{m*}(z)\right\}dz \tag{15}$$

但シ

$$(m,n)=\frac{1}{2}\iint\{\gamma_n x(H_x^m E_y^n - H_y^m E_x^n - E_x^m H_y^n + E_y^m H_x^n) + H_y^m E_z^n - E_y^m H_z^n\}\,dx\,dy \qquad (16)$$

コヽニ $(\mathbb{E}^m, \mathbb{H}^m)$, $(\mathbb{E}^n, \mathbb{H}^n)$ ハ何レモ (4) ニ於テ $\frac{\partial}{\partial z}$ ヲ $-\gamma_m x$, $\gamma_n x$ ト変ヘタモノヽ解トナッテ居ル. 斯ガッノ場合

$$\gamma_n x(E_y^m H_x^n - E_x^m H_y^n) - E_y^m H_z^n - \frac{\partial}{\partial x}(x E_y^m H_z^n) + \frac{\partial}{\partial y}(x E_x^m H_z^n)$$
$$= j\omega\varepsilon\, x(E_x^m E_x^n + E_y^m E_y^n) + j\omega\mu\, x H_z^m H_z^n$$

及ビ. コノ E ト H トヲ交換シテ符号ヲ少シ変ヘタ式ガ成立スル.
左辺ノ後ノ二項ハ積分スルト $\oint x E_s^m H_z^n ds$ (E_s ハ E ノ切線切分)
トナリ 0 トナルカラ

$$\iint\{\gamma_n x(E_y^m H_x^n - E_x^m H_y^n) - E_y^m H_z^n\}\,dx\,dy$$
$$= j\omega\iint x\{\varepsilon(E_x^m E_x^n + E_y^m E_y^n) + \mu H_z^m H_z^n\}\,dx\,dy \qquad (17)$$

同様ニ他ノ式モ出テ. 加ヘルト

$$(m,n)=\frac{1}{2}\iint x(j\omega\varepsilon\,\mathbb{E}^m \mathbb{E}^n + j\omega\mu\,\mathbb{H}^m \mathbb{H}^n)\,dx\,dy \qquad (18)$$

(m^*, n) ハ ( ) ノ $\mathbb{E}^m, \mathbb{H}^m$ ノカハリニ $\mathbb{E}^{m*}, \mathbb{H}^{m*}$ ヲ入レタモノデアル.
其ノ他同様
(m,n) ニツイテ

$$(m,n)=(n,m) \qquad (19)$$
$$(m,n)=(m^*, n^*) \qquad (20)$$

等ノ性質ハ直チニ分ル.
同様ニ

$$-A_{n*}(z_2)e^{-\gamma_n z_2} + A_{n*}(z_1)e^{-\gamma_n z_1}$$
$$= \int_{z_1}^{z_2} \alpha(z)e^{-\gamma_n z}\sum\{(m,n^*)A_n(z) + (m^*, n^*)A_{m*}(z)\} \qquad (15^*)$$

モ出ル. (15) 及ビ (15*) ハ $z < z_2$ ニ対スル A_n, A_{n*} ヲ
知ッタ時 $A_n(z_2)$, $A_{n*}(z_2)$ ヲ求メル一組ノ積分方程式
(Volterra 型) ト見做シ得ル. 又ハ逆ニ $z > z_1$ ニ対スル
値カラ $z = z_1$ ノ値ヲ求メル式ト見ルコトモデキル.
(15), (15*) ハ z_2 ニツイテ微分シテ z_2 ヲ z ト書クト

$$\frac{dA_n}{dz}+\gamma_n A_n=\alpha\sum\{(m,n)A_m+(m^*,n)A_{m*}\}$$
$$-\frac{dA_{n*}}{dz}+\gamma_n A_{n*}=\alpha\sum\{(m,n^*)A_m+(m^*,n^*)A_{m*}\} \tag{21}$$

ナル一組ノ聯立微分方程式トナル．コレ即チ導波管ニ沿ウテノ各部分振幅 A_n, A_{n*} ノ消長ヲアラハス微分方程式デアル．

(15) 及ビ (15*) ハ形式的ニハ何レモ $z<z_2$ デ與ヘラレテ $z=z_2$ ニツイテ解ケコトモ，$z>z_1$ デ與ヘラレテ $z=z_1$ ニツイテ解クコトモデキルガ，物理的ニ見テ，実際ニ與ヘラレルノハ

A_n ニツイテハ z ノ負ノ側ノ値

A_{n*} ニツイテハ z ノ正ノ側ノ値

デアル．故ニ，z_1 ヲ例ヘバ入射口，z_2 ヲ出射口トスレバ

$$\left.\begin{aligned}A_n(z)&=A_n(z_1)e^{\gamma_n(z_1-z)}+\int_{z_1}^{z}\alpha(z')e^{\gamma_n(z'-z)}\sum\{(m,n)A_m(z')\\&\qquad+(m^*,n)A_{m*}(z')\}dz'\\A_{n*}(z)&=A_{n*}(z_2)e^{\gamma_n(z-z_2)}+\int_{z}^{z_2}\alpha(z')e^{\gamma_n(z-z')}\sum\{(m,n^*)A_m(z')\\&\qquad+(m^*,n^*)A_{m*}(z')\}dz'\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

ヲ以テ A_n, A_{n*} ニ対スル積分方程式トスルコトガ自然デアル．コヽニ $A_n(z_1)$, $A_{n*}(z_2)$ ガ與ヘラレタ境界値デアル

α ガ小サイトキノ逐次近次ニヨル解法

A_m ヲ α ノ次数デ展開シテ

$$A_m=A_m^{(0)}+A_m^{(1)}+A_m^{(2)}+\cdots \tag{23}$$

($A_m^{(\lambda)}$ ハ α ノ λ 次ノ量)

トオキ，(21) ニ入レレバ，

$$\left.\begin{aligned}\frac{dA_n^{(i+1)}}{dz}+\gamma_n A_n^{(i+1)}&=\alpha\sum\{(m,n)A_m^{(i)}+(m^*,n)A_{m*}^{(i)}\}\\-\frac{dA_{n*}^{(i+1)}}{dz}+\gamma_n A_n^{(i+1)}&=\alpha\sum\{(m,n^*)A_m^{(i)}+(m^*,n^*)A_{m*}^{(i)}\}\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

又 (22) デ同様ノコトヲ行ヘバ

$$\left.\begin{aligned}A_n^{(i+1)}(z)&=e^{-\gamma_n z}\int_{z_1}^{z}\alpha(z')e^{\gamma_n z'}\sum\{(m,n)A_m^{(i)}(z')+(m^*,n)A_{m*}^{(i)}(z')\}dz'\\A_{n*}^{(i+1)}(z)&=e^{\gamma_n z}\int_{z}^{z_1}\alpha(z')e^{-\gamma_n z'}\sum\{(m,n^*)A_m^{(i)}(z)+(m^*,n^*)A_{m*}^{(i)}(z')\}dz'\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

但シ 曲線部ハスベテ z_1 ト z_2 トノ間ニ入ルガ故ニ z_1, z_2 ヲトルモノトスル。 之等ノ式カラ $A_n^{(1)}$, $A_n^{(2)}$ … ガ逐次ニ求メラレル.

(例) 長サ l ナル一様ナ曲リノ場合.

$$\alpha=\alpha \ (0<z<l) \qquad \alpha=0 \ (z<0,\ z>l)$$

第一次近似

$$A_n^{(1)}=\begin{cases} 0 & z<0 \qquad (29.1) \\ \alpha(m,n)\dfrac{e^{-\gamma_m z}-e^{-\gamma_n z}}{-\gamma_m+\gamma_n} & 0<z<l \qquad (29.2) \\ \alpha(m,n)\dfrac{e^{-\gamma_m l}-e^{-\gamma_n l}}{-\gamma_m+\gamma_n}e^{-\gamma_n(z-l)} & l<z \qquad (29.3) \end{cases}$$

$$A_{n^*}^{(1)}=\begin{cases} \alpha(m,n^*)\dfrac{e^{-(\gamma_m+\gamma_n)l}-1}{-(\gamma_m+\gamma_n)}e^{\gamma_n z} & z<0 \qquad (29.4) \\ \alpha(m,n^*)\dfrac{e^{-(\gamma_m+\gamma_n)l+\gamma_n z}-e^{-\gamma_m z}}{-(\gamma_m+\gamma_n)} & 0<z<l \qquad (29.5) \\ 0 & l<z \qquad (29.6) \end{cases}$$

第二次近似

$$\begin{aligned} A_n^{(2)}=\alpha^2\sum_p(m,p)(p,n)&\left\{\frac{e^{-\gamma_m z}}{(\gamma_m-\gamma_p)(\gamma_m-\gamma_n)}+\frac{e^{-\gamma_p z}}{(\gamma_p-\gamma_m)(\gamma_p-\gamma_n)}+\frac{e^{-\gamma_n z}}{(\gamma_n-\gamma_m)(\gamma_n-\gamma_p)}\right\} \\ +\alpha^2\sum(m,p^*)(p^*,n)&\left\{\frac{-e^{-\gamma_m z}}{(\gamma_m+\gamma_p)(\gamma_m-\gamma_n)}+\frac{-e^{-(\gamma_m+\gamma_p)l+\gamma_p z}}{(\gamma_p+\gamma_m)(\gamma_p+\gamma_n)}\right. \\ &\left.+\left(\frac{e^{-(\gamma_m+\gamma_p)l}}{\gamma_n+\gamma_p}+\frac{1}{\gamma_m-\gamma_n}\right)\frac{-e^{-\gamma_n z}}{\gamma_m+\gamma_p}\right\} \quad (0<z<l) \qquad (31.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{n^*}^{(2)}=\alpha^2\sum(m,p)(p,n^*)&\left\{\frac{-e^{-\gamma_m z}}{(\gamma_m-\gamma_p)(\gamma_m+\gamma_n)}+\frac{-e^{-\gamma_p z}}{(\gamma_p-\gamma_m)(\gamma_p+\gamma_n)}\right. \\ &\left.+\left(\frac{e^{-(\gamma_m+\gamma_n)l}}{\gamma_n+\gamma_m}-\frac{e^{-(\gamma_n+\gamma_p)l}}{\gamma_n+\gamma_p}\right)\frac{e^{\gamma_n z}}{\gamma_m-\gamma_p}\right\} \\ +\alpha^2\sum(m,p^*)(p^*,n^*)&\left\{\frac{e^{-\gamma_m z}}{(\gamma_m+\gamma_p)(\gamma_m+\gamma_n)}+\frac{e^{-(\gamma_m+\gamma_p)l+\gamma_p z}}{(\gamma_m+\gamma_p)(\gamma_p-\gamma_n)}+\frac{e^{-(\gamma_m-\gamma_n)l+\gamma_n z}}{(\gamma_n+\gamma_m)(\gamma_n-\gamma_p)}\right\} \qquad (31.2) \end{aligned}$$

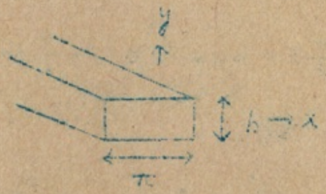
$$\begin{aligned} A_m^{(2)}=\alpha^2\sum_p(m,p)^2&\left\{\frac{-z\,e^{-\gamma_m z}}{\gamma_m-\gamma_p}+\frac{e^{-\gamma_p z}-e^{-\gamma_m z}}{(\gamma_m-\gamma_p)^2}\right\} \\ +\alpha^2\sum_p(m,p^*)^2&\left\{\frac{z e^{-\gamma_m z}}{\gamma_m+\gamma_p}-\frac{e^{-(\gamma_m+\gamma_p)l}}{(\gamma_m+\gamma_p)^2}\left(e^{\gamma_p z}-e^{-\gamma_m z}\right)\right\} \qquad (33.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{m^*}^{(2)}=\alpha^2\sum_p(m,p)(m,p^*)&\left\{\frac{-\gamma_p e^{-\gamma_m z}+(\gamma_m+\gamma_p)e^{-\gamma_m(2l-z)}-\gamma_m e^{-(\gamma_m+\gamma_p)l+\gamma_m z}}{\gamma_m(\gamma_m^2-\gamma_p^2)}\right. \\ &\left.+\frac{e^{-\gamma_p z}-e^{-(\gamma_m+\gamma_p)l+\gamma_p z}}{\gamma_m^2-\gamma_p^2}\right\} \end{aligned}$$

矩形導波管に於て高調波による共鳴の現象

第一部　二次元的の場合

記号



時間因子 e^{-ikct} 及び y に関する因子 $\cos\frac{m\pi}{b}y$, $\sin\frac{m\pi}{b}y$ を省略して式を書く。一次波の進行方向は $+z$

$$w^2=k^2-\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2,\qquad k_l^2=w^2-l^2,\quad (Rk_l>0 \text{ 又は } Ik_l>0)$$

$$S_{lp}^{(1)}=\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\sin l\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\sin p\left(x+\frac{\pi}{2}\right)dx=-\frac{4}{\pi}\eta_{lp}\frac{2lp}{(l^2-p^2)^2}$$

$$C_{lp}^{(1)}=\frac{\sqrt{\varepsilon_l\varepsilon_p}}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\cos l\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cos p\left(x+\frac{\pi}{2}\right)dx=-\frac{2\sqrt{\varepsilon_l\varepsilon_p}}{\pi}\eta_{lp}\frac{l^2+p^2}{(l^2-p^2)^2}$$

$\varepsilon_p=$ Neumann の数因子　$\varepsilon_0=1$, $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\cdots=2$

$$\eta_{lp}=\frac{1}{2}\left\{1-(-1)^{l+p}\right\}$$

±, ∓：上下符号は夫々問題となる区域の前（z負の側）後（z正の側）を示す。

$W_{pl}^{\pm}=$ 単位エネルギーの調子 l の一次波に対し調子 p で遠方へ出る二次波のエネルギー
（$k_p^2<0$ なら $W_{pl}^{\pm}=0$）

§1　微小な折曲り

折曲りの角を 2α とする（$\alpha\ll1$）。境界面は $z=\mp\alpha x$。
LM 波（$H_y\equiv0$）については

$$E_y = \sin l\left(x+\frac{\pi}{2}\right)e^{ik_l z} + \sum (a_p \pm b_p)\sin p\left(x+\frac{\pi}{2}\right)e^{\pm ik_p z} \tag{1.1}$$

$[E_y]_{z=\mp\alpha x}$ の一致

$$-ik_l\,\alpha x\sin l\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + b_p \sin p\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = 0 \tag{1.2}$$

$\left[\frac{\partial E_y}{\partial z} \pm \alpha\frac{\partial E_y}{\partial x}\right]_{z=\mp\alpha x}$ の一致

$$-ik_l \sin l\left(x+\frac{\pi}{2}\right) ik_l\alpha x + \sum a_p i k_p \sin p\left(x+\frac{\pi}{2}\right)(1-ik_p\alpha x)$$
$$+\alpha l\cos l\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - \alpha\sum a_p\, p\cos p\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = 0 \tag{1.3}$$

$\frac{2}{\pi}\sin p\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ を乗じて $-\frac{\pi}{2}$ から $\frac{\pi}{2}$ まで積分すれば

$$-ik_l\,\alpha S_{lp}^{(0)} + b_p = 0 \tag{1.4}$$

$$S_{lp}^{(2)} + a_p i k_p + \sum_q a_q S_{qp}^{(2)} = 0 \tag{1.5}$$

ここに $$S_{lp}^{(2)} = \alpha\left(\omega^2 S_{lp}^{(0)} - l_p C_{lp}^{(0)}\right) = \alpha\eta_{lp}\frac{4}{\pi}lp\frac{k_l^2+k_p^2}{(l^2+p^2)^2} \tag{1.6}$$

$$W_{pl}^{\pm} = \frac{k_p}{k_l}|a_p \pm b_p|^2,\quad \text{但し特に}\quad W_{ll}^{+} = |1+a_l+b_l|^2 \tag{1.7}$$

共鳴 $|k_\nu| \leqq \alpha^2$

$$\left.\begin{aligned} a_\nu &= \frac{iS_{l\nu}^{(2)}}{k_\nu + \sum\limits_q \frac{(S_{\nu q}^{(2)})^2}{k_q}}, \qquad a_n = \frac{a_\nu S_{\nu n}^{(2)}}{-ik_n} \quad (n \neq \nu) \\ S_{\nu q}^{(2)} &= \alpha\eta_{\nu q}\frac{4}{\pi}\frac{\nu q}{\nu^2-q^2}, \qquad k_q = \sqrt{\nu^2-q^2} \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

特に $\nu = 2, 3$ の場合

$$\sum \frac{(S_{\nu q}^{(2)})^2}{k_q} = u - iv \qquad u, v > 0$$

とおけば $l = \nu - 1$ につき

$k_\nu^2 > 0$:

$$\left.\begin{aligned}
W_{ll}^{+} &= \frac{k_\nu^2 + v^2}{(k_\nu + u)^2 + v^2} \geq \frac{u^2 + 2v^2 - u\sqrt{u^2 + 4v^2}}{2v^2} \\
&\qquad \left(等号は\ k_\nu = \frac{\sqrt{u^2+4v^2} - u}{2}\ のとき\right) \\
W_{ll}^{-} &= \frac{u^2}{(k_\nu + u)^2 + v^2} \leq \frac{u^2}{u^2 + v^2} \\
W_{\nu l}^{\pm} &= \frac{k_\nu u}{(k_\nu + u)^2 + v^2} \leq \frac{u}{2(u + \sqrt{u^2 + v^2})} \\
&\qquad \left(等号は\ k_\nu = \sqrt{u^2 + v^2}\ のとき\right)
\end{aligned}\right\} \quad (1.9)$$

$k_\nu^2 < 0$:

$$\left.\begin{aligned}
W_{ll}^{+} &= \frac{(-ik_\nu - v)^2}{u^2 + (-ik_\nu - v^2)} \\
W_{ll}^{-} &= \frac{u^2}{u^2 + (-ik_\nu - v)^2}
\end{aligned}\right\} \quad (1.10)$$

" W_{ll}^{+} は k_ν^2 の正負の側に夫々正(≠0)及び零なる極小値を有する "

LE 波 ($E_y \equiv 0$)

$$H_y = \sqrt{\frac{E_l}{2}} \cos l\left(x + \frac{\pi}{2}\right) e^{i k_l z} + \sum (a_p \pm b_p) \sqrt{\frac{E_p}{2}} \cos p\left(x + \frac{\pi}{2}\right) e^{\pm i k_p z} \quad (1.1')$$

を採り同様に計算すれば

$$-ik_l \alpha C_{lp}^{(0)} + b_p = 0 \qquad (1.4')$$

$$C_{lp}^{(2)} + a_p i k_p + \sum a_q C_{qp}^{(2)} = 0 \qquad (1.5')$$

$$C_{lp}^{(2)} = \alpha(\omega^2 C_{lp}^{(0)} - lp S_{lp}^{(0)}) = \alpha \eta_{lp} \frac{2\sqrt{E_l E_p}}{\pi} \frac{l^2 k_p^2 + p^2 k_l^2}{(l^2 - p^2)^2}. \qquad (1.6')$$

共鳴についても同様、特に $\nu = 1, 2$ につき (1.9) (1.10) 成立す.

§2 S形接合部 (曲率 $\pm\frac{1}{R}$, $\frac{1}{R}\ll 1$, 接合面 $z=0$)

(LM波) $$E_y=(\pm1)^{l+1}S_l(\pm x)e^{ik_l z}+\sum_p(a_p\pm b_p)(\pm1)^{p+1}S_p(\pm x)e^{\pm ik_p z} \tag{2.1}$$

$$(\pm)^{l+1}S_l(\pm x)=\sin l\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\pm\sum_{p\neq l}S_{lp}^{(1)}\sin p\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \tag{2.2}$$

附録 1 により $$S_{lp}^{(1)}=\frac{1}{R}\frac{1}{l^2-p^2}\left\{(k_l k_p-w^2)S_{lp}^{(0)}+lp\,C_{lp}^{(0)}\right\} \tag{2.3}$$

$$=\frac{1}{R}\eta_{lp}\frac{4}{\pi}\frac{1}{l^2-p^2}\frac{\pm lp}{(k_l+k_p)^2} \tag{2.4}$$

$z=0$ で E_y, $\frac{\partial E_y}{\partial z}$ 連続なる条件は

$$\left.\begin{aligned} S_{lp}^{(1)}+b_p+\sum a_q S_{qp}^{(1)}&=0\\ k_l S_{lp}^{(1)}+a_p k_p-\sum b_q k_q S_{qp}^{(1)}&=0 \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

$|k_\nu|\leq\left(\frac{1}{R}\right)^2$:

$$b_n=-a_\nu S_{\nu n}^{(1)},\quad a_\nu=\frac{k_l S_{l\nu}^{(1)}}{-k_\nu+\sum_q k_q S_{\nu q}^{(1)}S_{q\nu}^{(1)}},\quad a_n,\ b_\nu=O\left(\frac{1}{R}\right)$$

特に $\nu=2,3$ の場合

$$\sum_q k_q\left(S_{\nu q}^{(1)}\right)^2=u+iv\qquad(u,v>0)$$

とおけば $l=\nu-1$ につき $k_\nu^2>0$ の場合は (1.9) と全く同型の式が成立し, $k_\nu^2<0$ の場合は (1.10) に於て $-v$ を $+v$ でおきかへたものが成立する

“W_{l}^{+} は $k_\nu^2>0$ の範囲に正($\neq0$)の極小値を有し他の極小値を有しない”

(LE波) $$H_y=(\pm1)^l\sqrt{\frac{\varepsilon_l}{2}}C_l(\pm x)e^{ik_l z}+\sum(a_p\pm b_p)(\pm1)^p\sqrt{\frac{\varepsilon_p}{2}}C_p(\pm x)e^{\pm ik_p z} \tag{2.1'}$$

$$(\pm1)^l\sqrt{\frac{\varepsilon_l}{2}}C_l(\pm x)=\sqrt{\frac{\varepsilon_l}{2}}\cos l\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\pm\sum C_{lp}^{(1)}\cos p\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \tag{2.2'}$$

$$C_{\ell p}^{(1)} = \frac{1}{R}\frac{1}{\ell^2-p^2}\left\{(k_\ell k_p - \omega^2)C_{\ell p}^{(0)} + \ell p\, S_{\ell p}^{(0)}\right\} \tag{2.3'}$$

$$= \frac{1}{R}\eta_{\ell p}\frac{\sqrt{\varepsilon_\ell \varepsilon_p}}{\pi}\frac{1}{\ell^2-p^2}\left\{1+\frac{\ell^2+p^2}{(k_\ell+k_p)^2}\right\} \tag{2.4'}$$

(2.5), (2.6) で $S_{\ell p}^{(1)}$ を $C_{\ell p}^{(1)}$ でおきかへればこの場合の結果が得られる.

§3 一部分續く円形に曲った導波管

(接合面 $z=\pm R\phi$, $\frac{1}{R}\ll 1$)

(LM波)

$$E_y = \sin \ell\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right)e^{ik_\ell(z\mp R\phi)\pm iK_\ell R\phi}$$

$$+\sum(a_p \pm b_p)\sin p\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right)e^{\pm ik_p(z\mp R\phi)+iK_p R\phi} \qquad (z \gtrless \pm R\phi)$$

(3.1)

$$E_y = S_\ell(x)e^{iK_\ell z} + \sum S_p(x)(A_p\cos K_p z + B_p \sin K_p z)$$

$$(-R\phi < z < R\phi)$$

$$K_p^2 = k_p^2 + O\left(\frac{1}{R^2}\right)$$

$\cos(K_p R\phi) = \gamma_p$, $\sin(K_p R\phi) = \sigma_p$ とおく (3.2)

境界條件:

$$-(a_p \pm b_p)(\gamma_p + i\sigma_p) + (A_p\gamma_p \pm B_p\sigma_p) + (\gamma_\ell \pm i\sigma_\ell)S_{\ell p}^{(1)}$$

$$+\sum(A_q\gamma_q \pm B_q\sigma_q)S_{qp}^{(1)} = 0.$$

(3.3)

$$\mp ik_p(a_p \pm b_p)(\gamma_p + i\sigma_p) + K_p(\mp A_p\sigma_p + B_p\gamma_p)$$

$$+iK_\ell(\gamma_\ell \pm i\sigma_\ell)S_{\ell p}^{(1)} + \sum K_q(\mp A_q\sigma_q + B_q\gamma_q)S_{qp}^{(1)} = 0.$$

b_p, B_p を消去し

$$-a_p(\gamma_p + i\sigma_p) + A_p\gamma_p + \gamma_\ell S_{\ell p}^{(1)} + \sum A_q\gamma_q S_{qp}^{(1)} = 0 \tag{3.4a}$$

$$+ik_p a_p(\gamma_p + i\sigma_p) + K_p A_p \sigma_p + K_\ell \sigma_\ell S_{\ell p}^{(1)} + \sum K_q A_q \sigma_q S_{qp}^{(1)} = 0. \tag{3.5a}$$

更に

$$f(q,p) = \gamma_q k_p - i\sigma_q K_q \tag{3.6a}$$

とおき a_p を消去すれば

$$A_p f(p,p) + f(l,p) S^{(1)}_{lp} + \sum A_q f(q,p) S^{(1)}_{qp} = 0 \qquad (3.7a)$$

(3.3) で $a_p A_p$ を消去し

$$-b_p(\gamma_p + i\sigma_p) + B_p\sigma_p + i\sigma_l S^{(1)}_{lp} + \sum B_q \sigma_q S^{(1)}_{qp} = 0 \qquad (3.4b)$$

$$-ik_p b_p(\gamma_p + i\sigma_p) + K_p B_p \gamma_p + iK_l \gamma_l S^{(1)}_{lp} + \sum K_q B_q \gamma_q S^{(1)}_{qp} = 0 \qquad (3.5b)$$

b_p を消去し

$$g(q,p) = \gamma_q K_q - i\sigma_q k_p \qquad (3.6b)$$

とおけば

$$B_p g(p,p) + ig(l,p) S^{(1)}_{lp} + \sum B_q g(q,p) S^{(1)}_{qp} = 0 \qquad (3.7b)$$

凡てが $|k_p| \gg \frac{1}{R}$ のときは上式を解き

$$k_p(a_p \pm b_p) = i(k_l \pm k_p)\sin(k_l R\phi \mp k_p R\phi) S^{(1)}_{lp} \qquad (3.8)$$

なることが判る.

$k_\nu, K_\nu \leq \frac{1}{R}$ の場合. $K_\nu^2 = k_\nu^2 + \frac{1}{4R^2}$ (附録 2) (3.9)

$|g(\nu,\nu)| = |\gamma_\nu k_\nu - i\sigma_\nu K_\nu| \leq \frac{1}{R^2}$ 即ち $K_\nu = K_\nu^0 + O(\frac{1}{R^2})$, $\frac{\phi}{2} = \frac{K_\nu^0 R\phi}{\cos(K_\nu^0 R\phi)}$ のとき

$A_\nu = O(R)$, $A_n = O(1)$, 従って $a_\nu = O(R)$, $a_n = O(1)$ $(n \neq \nu)$

となり強い二次波を生ずる. a_p 等の形を明様に求めることも容易である.

$|g(\nu,\nu)| = |\gamma_\nu K_\nu - i\sigma_\nu k_\nu| \leq \frac{1}{R^2}$ のときも共鳴を起す筈であるが $0 < \phi < \pi$ ではかゝることはない.

(LE波) (3.9) に相当するものは $(\nu \neq 0)$

$$K_\nu^2 = k_\nu^2 - \frac{3}{4R^2}, \qquad (k_\nu, K_\nu \leq \frac{1}{R}) \qquad (3.9')$$

であるから

$$|\gamma_\nu k_\nu - i\sigma_\nu K_\nu| \leq \frac{1}{R^2}, \quad |\gamma_\nu K_\nu - i\sigma_\nu k_\nu| \leq \frac{1}{R^2}$$

になることはない. 従って共鳴は起らない.

附録 1. (2.3) の證明

Gauß の定理より得られる

$$\int_S \{[\mathfrak{E}\mathfrak{H}'] - [\mathfrak{E}'\mathfrak{H}]\} n \, dS = \int_v \{(\mathfrak{E}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{H}' - \mathfrak{E}'\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{H}) + (\mathfrak{H}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{E}' - \mathfrak{H}'\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{E})\} dv$$

に於て $\mathfrak{E}, \mathfrak{H}$ として

$$E_y = S_l(x) e^{ik_l z} = \left\{\sin l\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + \sum_{l \neq p} S_{lp}^{(1)} \sin p\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right\} e^{ik_l z}$$

より定まる LM 波を $\mathfrak{E}', \mathfrak{H}'$ として

$$E_y' = \sin p\left(x+\frac{\pi}{2}\right) e^{ik_p z}$$

より定まる眞直な管の場合の LM 波を採り $z_1 < z < z_2$ の範囲に積分すれば

$$左辺 = \int \{(E_y H_x' - E_y' H_x)_{z_2} - (E_y H_x' - E_y' H_x)_{z_1}\} dx$$

$$= \frac{ik}{w^2} \frac{\pi}{2} (k_l - k_p) S_{lp}^{(1)} \{ e^{i(k_l+k_p)z_2} - e^{i(k_l+k_p)z_1} \}$$

$$右辺 = \int_v \{\mathfrak{E}(\mathrm{rot}\,\mathfrak{H}' + ik\mathfrak{E}') + \mathfrak{H}(\mathrm{rot}\,\mathfrak{E}' - ik\mathfrak{H}')\} dv$$

$$= \frac{1}{R} \int \left(x H_x \frac{\partial E_y'}{\partial z} - x E_y \frac{\partial H_x'}{\partial z} - E_y E_z'\right) dx\, dz$$

$$= \frac{1}{R} \frac{k}{w^2} \frac{\pi}{2} \frac{1}{i(k_l + k_p)} \{(k_l k_p - w^2) S_{lp}^{(0)} + lp\, C_{lp}^{(0)}\} \{ e^{i(k_l+k_p)z_2} - e^{i(k_l+k_p)z_1} \}$$

之より直ちに (2.3) を得る.

附録 2.

$$S_l(x) = \frac{\pi}{2} wR J H_{RK_\nu}^{(2)}(wR + wx) H_{RK_\nu}^{(1)}\left(wR - \frac{\pi}{2} w\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{R}}\sqrt{1-\frac{\pi}{2R}}} \left\{ \sin w\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - \frac{4(RK_\nu)^2-1}{8\nu^2R^2} \nu\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \cos \nu\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + \frac{4(RK_\nu)^2-1}{8\nu^2R^2} \sin \nu\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \right\}$$

$S_l\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ より $\quad w = \nu\left(1 + \frac{4(RK_\nu)^2-1}{8\nu^2R^2}\right)$

故に $\quad w^2 - \nu^2 = k_\nu^2 - K_\nu^2 - \frac{1}{4R^2}.$