矩形斷面ヲ有スル導波管ノ彎曲部ニ於ケル電磁波ノ反射ニ關スル計算

大阪帝國大學敎授
永　宮　健　夫

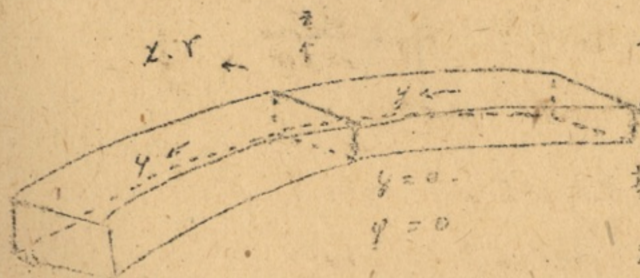
目的及ビ内容概説

導波管ノ彎曲部ニ於ケル電磁波ノ反射．透過。入射波ト異ル型ノ波ノ發生等ノ問題ハ。從來多クノ實驗ニヨツテ調ベラレテヰルガ。實驗結果ガ種々ノ原因ニヨツテ複雜化サレテヰルノデ．未ダ充分ナ解析ガ行ハレテヰルトハ云ヒ難イ　本研究ハコノ問題ヲ矩形斷面ヲ有スル導波管ニ於テ一般的ニ取扱フト共ニ．阪大助敎授伊藤順吉氏ニヨツテ遂行サレタ實驗ニ對應シテ具体的數値計算ヲ行ツタモノデアル　ソノ實驗デハ4.5 Cm ×7Cm ノ斷面ノ導波管ヲ使用シ。ソレニ中心線ノ曲率半徑ガ15Cm.20Cm.25Cm ノ三種類ノ彎曲部（曲リハ何レモ90）ヲ取付ケ。コレニ自由空間ノ波長10Cm ノ波ヲ入レテ彎曲部ニ於ケル反射ヲ調ベタモノデ。其ノ結果ハ實驗誤差（約5%）ノ範圍内デ反射ガナイトイフコトデアツタ。計算ノ結果ハ1%以下ニナル。尙。水平面内デ曲ゲタ時ノ上下ノ底面ノ幅ガ7Cm ノトキハ其レガ4.5Cmノ時ヨリモ反射ノ理論値ガ小サク出ル。尙。一般論ニ於テハ．眞直ナ部分ト曲ツタ部分ノ接ギ目ニ於テ起ル波ノ反射。透過。高次又ハ異型ノ波ノ發生ノ係數（位相モ含メテ）ヲ計算スル方式ヲ與ヘル

本　論

1．以下デハ半無限ニ長イ眞直ナ導波管ト。半無限ニグルグル巻イテ續イテキル導波管ノ接續ヲ考ヘル。コノ様ナモノハ實現サレナイガコヽデ意味スル所ハ。導波管ノ端．又ハ他ノ部分トノ接ギ目ヲ考慮セズ。單一ノ接ギ目（直線ト圓ノ導波管ノ）ヲ扱フトイフコトデアル直線一圓一直線トイフ様ナ二重又ハソレ以上ノ接ギ目ガアル時ハ．多クノ實際的ナ場合ニハ單一ノ接ギ目ノ影響ヲ加算シテ行ケバヨイ。反射ガ大キク起ル場合　他型ノ波ガ大キク發生スル場合ハソウシテハナラナイガ。併シ其ノ場合モ。取扱ヒノ方法ハ以下ノ方法カラ容易ニ推察セラレルデアラウ．（以下ノ様ニ進行波ノミヲ考ヘズ。定常波ノ成分モ考ヘル）

眞直ナ部分デハ直線座標X．Y。Zヲトリ。圓形ニ曲ツタ部分デハ圓筒座標r。φ．z。ヲ取ル，圖ニ示ス様ニZハ彎曲面ニ垂直ナ方向ニYノ増ス方向ハφノ増ス方向ヘトリ。X及ビrハコノ二方向ニ垂直ニトル。Z方向ノ管ノ高サヲc，X．r方向ノ管ノ幅ヲaトスル．



$a > c$ノ場合ト$a < c$ノ場合トヲ區別スル

Zハ波ノ進行方向デナイガ。$H_z = 0$ナル波ヲE一波　$E_z = 0$デアル波ヲE一波ト呼ブ

§2. 眞直ナ管ノ中ノ波

M.K.S 系 ヲトリ．時間因數ヲ $e^{-i\omega t}$ 。眞空中ノ波數ノ 2 π ヲ K トスルト．E一波ハポテンシアル U ヲ使ツテ次ノ様ニ表ハサレル：

$$\left.\begin{aligned} E_z &= k^2 U + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, \quad E_x = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x}, \quad E_y = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} \\ H_z &= 0 \quad H_x = -i\omega\varepsilon \frac{\partial U}{\partial y}, \quad H_y = i\omega\varepsilon \frac{\partial U}{\partial x} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

壁ハ完全導体トスレバ。X＝0．a デハ E_z ＝ E_y ＝ H_x ＝0 依ツテ U＝0 又 Z＝0．C デハ E_x ＝ E_y ＝ H_z ＝0．依ツテ $\frac{\partial U}{\partial z} = 0$

コレヨリ U ハ次ノ様ニ定マル

$$U = e^{\pm i\beta y} \sin \alpha x \cos \gamma z \qquad (3)$$

$$\alpha = \frac{l\pi}{a} \quad l = 1.2.3. \cdots\cdots,$$

$$\gamma = \frac{n\pi}{c}. \quad n = 0.1.2 \cdots\cdots,$$

$$\beta = \sqrt{k^2 - \alpha^2 - \gamma^2} \qquad (\Im(\beta) \geqq 0 トスル)$$

H一波ノ場合ハ．上ト同様ニ

$$\left.\begin{aligned} E_z &= 0 \quad E_x = i\omega\mu \frac{\partial U}{\partial y}, \quad E_y = -i\omega\mu \frac{\partial U}{\partial x} \\ H_z &= k^2 U + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, \quad H_x = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x}, \quad H_y = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

$$U = e^{\pm i\beta y} \cos \alpha x \sin \gamma z,$$

$$\alpha = \frac{l\pi}{a} \quad l = 0.1.2. \cdots\cdots,$$

$$\gamma = \frac{n\pi}{c} \quad n = 1.2.3 \cdots\cdots,$$

$$\beta = \sqrt{k^2 - \alpha^2 - \gamma^2} \qquad (\Im(\beta) \geqq 0)$$

通常ハ基本波ノミガ通過スル場合ヲ扱フ．依ツテ以下デモ其ノ場合ニ限リ．他ノ波ハ速カニ消エテシマフ

(attennate)ト假定スル。コレハ．$\lambda = 10$ Cm．$a = 7$ Cm．$c = 45$ Cm

(又ハa．C交換)ノ場合ニハ成立スル．コノ場合ニハE一波ノ基体波

$\gamma = 0$．$\lambda = \pi/a$（又ハE一基本波 $\gamma = \pi/c$．$\lambda = 0$）ダケガ通リ．他

ノ β ハ虚數デ通ラナイ。シカモ第一ノ Oberton（$l = 1$ $n = 1$）ノ ハ

0.54 $i1/\mathrm{cm}$ デ波ハ約6．5 cm 進ンデ其ノ振幅ガ1％ニ減リ次ノ Oberton（$l = 2$ $n = 0$）ノ β ハ 0.63 i デ．波ハ7.3 cm 進ンデ1％ニ減ル程度デアル。從ツテ此等ノ Oberton ガ接ギ目ニ於テ發生トシテモソノ影響ハ殆ンド無イ．

§3．　圓形ニ曲ツタ管ノ中ノ波

<u>E一波</u>　ハ次ノ様ニ表ハサレル；

$$\left.\begin{aligned} &E_z = k^2 U + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2},\quad E_r = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial r},\quad E_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \varphi}, \\ &H_z = 0\quad H_r = -i\omega\varepsilon \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi},\quad H_\varphi = i\omega\varepsilon \frac{\partial U}{\partial r}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

但シUハヤハリ $\triangle U + K^2 U = 0$ ノ解デアル．境界條件ハ；

$$r = r_1,\ r = r_2 \text{ デ } E_z = E_\varphi = H_r = 0,\ \therefore U = 0$$

$$z = 0,\ z = c \text{ デ } E_r = E_\varphi = H_z = 0\ \therefore \frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

コレニヨリ

$$U = e^{\pm i\mu\varphi}\psi(r)\cos\gamma z \tag{6}$$

$$\gamma = \frac{n\pi}{c} \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

トナル．但シ $\psi(r)$ ハ圓筒函數デ

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr} + \left(k^2 - \gamma^2 - \frac{\mu^2}{r^2}\right)\psi = 0 \tag{7}$$

ノ解デ $\psi(r_1) = \psi(r_2) = 0$ トナルモノデアル。μ ハコノ條件ヨリ定マル

[illegible]其ノ[illegible]フコトハコノ場合ハ甚ダ不便デアルノデ．

§6デ$\psi(r)$及ビνヲ近似的ニ求メル方法ヲ述ベル

H一波ノ場合ハE．Hハ次ノ如クデアル：

$$
\left.
\begin{aligned}
&E_z = 0 \quad E_r = i\omega\mu \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad E_\varphi = -i\omega\mu \frac{\partial U}{\partial r} \\
&H_z = k^2 U + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, \quad H_r = \frac{\partial^2 U}{\partial z\, \partial r}, \quad H_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial z\, \partial \varphi}
\end{aligned}
\right\} \qquad (8)
$$

而シテUハ

$$U = e^{\pm i\nu\varphi}\,\psi(r)\,\sin\gamma z$$

$$\gamma = \frac{n\pi}{c}. \quad n = 1.2.3 -----$$

トナリ．$\psi(r)$ハヤハリ(7)ノ解デ．但シ$\psi(r_1) = \psi(r_2) = 0$トナルモノデアル．コノ場合ノ$\nu$モコノ條件カラ定マル．

γ(及ビk)ガ等シク．νノ異ル二ツノ$\psi(r)$——ソレヲ$\psi_i(r)$，$\psi_j(r)$トスル——ノ間ニハ(7)ニヨリ次ノ様ナ直交性ガ成立ツ：

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r}\,\psi_i(r)\,\psi_j(r)\,dr = 0 \qquad (10)$$

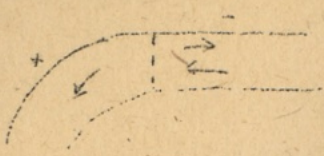
以下デハ $i=j$ ノ場合ハ

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r}\left\{\psi_i(r)\right\}^2 dr = 1 \qquad (11)$$

ト定メル．

§4。 接ギ目ニ於ケル状況

今。二ツノ場合ヲ考ヘル．其ノ一ツハ眞直ナ部分カラ波ガ入射シテ。一部ガ反射サレ．一部ガ彎曲部ニ入ル．第二ハ其ノ反射ニ．彎曲部カラ入射シテ一部ガ反射サレ。一部ガ眞直ナ部分ニ入ル場合デアル。第二ノ場合ハ便宜上波ノ方向ヲスベテ反対ニシテ置クカ，或ヒハ時間ヲ反對ニシテ波ノ方向ヲ其ノ儘ニシテ置ク．

(i) 　(ii) 

以下眞直ナ部分ニハ㊀ヲ．彎曲部ニハ㊉ノ附號ヲ附シテ置ク，兩者ノ境ハ $y=0$．且ツ $\varphi=0$ デアルトスル．接ギ目ニ於ケル數學的條件ハE．Hガ連續ニツナガルコトカラ．（2）ト（5）或ヒハ（4）ト（8）ヲ見較ベテ

$$\left.\begin{aligned} v_-\big|_{y=0} &= v_+\big|_{\varphi=0} \\ \frac{\partial v_-}{\partial y}\bigg|_{y=0} &= \frac{\partial v_+}{r\,\partial\varphi}\bigg|_{\varphi=0} \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

デアル

接ギ目ノ兩者デハ當然各種ノ Oberton ガ生ズル．ソレハ入射側デハ反射波ノ形デ．透過側デハ透過波ノ形デ生ズル筈デアル併シ全テノ Oberton ガ生ズル譯デハナイ

入射波ノ性質ニヨリ．ソレト結ビツイテ發生スル Oberton ハ限定サレル．今問題ニスルノハ．入射波ガE-波又ハH-波ノ基本波デアル場合デ．E-波ノ場合ハUハZニ無關係デ．即チFourier 成分ノ常數値ニ相當スル波デアル．從ツテ發生スルアラユル Oberton ハZニ無關係ナE-波ノミデアル．H-波ノ場合ハU ハ sin γz（$\gamma=\pi/c$）ナル函數ヲモツ．從ツテ發生スルアラユル Oberton ハコノ Fourier 成分ノH-波ノミデアル

從ツテ前圖（i）ノ場合デE-基本波ガ入射スル場合ハ．眞直ナ部分ノ U_- 彎曲部ノ U_+ ハ次ノ様ナ無限級數デ表ハサレル：

$$\left.\begin{aligned} U_- &= e^{i\beta_1 y}\sin\alpha_1 x+\sum_{l=1}^{\infty}a_l e^{-i\beta_l y}\sin\alpha_l x, \\ U_+ &= \sum_{i=1}^{\infty} b_i\, e^{i\mu_i y}\psi_i(r) \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

但シ

$$\alpha_1=\frac{\pi}{a},\quad \alpha_l=\frac{l\pi}{a}$$

$$\beta_1=\sqrt{k^2-\alpha_1^2},\quad \beta_l=\sqrt{k^2-\alpha_l^2}$$

又 μ_i ハ $\psi_i(r)$ ニ對スル (7) 式ノ固有値デアル。

(13) ノ U_- ノ第一項ハ y 方向ニ入射スル波。第二項ノ和ハ接ギ目デ反射サレ。一 y 方向ニ進ム波ヲ表ハス U_+ ハ透過波ノミカラ成立ツ。次ニ振幅（複素數）a_l b_i ヲ求メル

§5　反射係數ノ透過係數ノ計算

(13) ノ兩式ヲ (12) ニ代入スレバ次式ヲ得ル：

$$\left.\begin{aligned} &\sin\alpha_1 x+\sum_{l=1}^{\infty}a_l\sin\alpha_l x=\sum_{i} b_i\psi_i(r), \\ &\beta_1\sin\alpha_1 x-\sum_{l=1}^{\infty}\beta_l a_l\sin\alpha_l x=\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i b_i\frac{\psi_i(r)}{r} \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

但シ　$r=r_1+x$，$r_2-r_1=a$．

(14) ノ第一式ニ $\psi_i(r)/r$ ヲ乘ジテ x ニツイテ r_1 カラ r_2 マデ積分スレバ。$\psi_i(r)$ ノ直交性ニヨリ次式ガ得ラレル

$$D_{i1}+\sum_{l=1}^{\infty}a_l D_{il}=b_i \quad (15)$$

但シ

$$D_{il}=\int_0^a\frac{\psi_i(r)}{r}\sin\alpha_l x\,dx \quad (16)$$

又 (14) ノ第二式ニ $\psi_i(r)$ ヲ乘ジテ積分スレバ

$$C_{i1}-\sum_{l=1}^{\infty}a_l C_{il}=b_i, \quad (17)$$

但シ

$$C_{il}=\frac{\beta_l}{\mu_i}\int_0^a\psi_i(r)\sin\alpha_l x\,dx.$$

(15)(17) ヨリ b_i ヲ消シテ

$$D_{i1}+\sum_{l=1}^{\infty} a_l D_{il} = C_{i1}-\sum_{l=1}^{\infty} a_l C_{il},$$

$$\therefore \sum_{l=1}^{\infty} (C_{il}+D_{il})a_l = C_{i1}-D_{i1} \qquad (19)$$

コノ方程式ヲ解イテ a_l ガ求メラレル。例ヘバ a（入射波ト同ジ型ノ反射波ノ振幅）ハ次ノ如クナル

$$a=\begin{vmatrix} C_{11}-D_{11} & C_{12}+D_{12} & \cdots \\ C_{21}-D_{21} & C_{22}+D_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} C_{11}+D_{11} & C_{12}+D_{12} \\ C_{21}+D_{21} & C_{22}+D_{22} \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix} \qquad (20)$$

次ニ(14)ノ両式ニ夫々 $\sin \alpha_l x$ ヲ乗シテ x ニツキ0カラ a 迄積分スレバ。三角函数ノ直交性ニヨリ次ノ二式ガ得ラレル

$$\frac{a}{2}(\delta_{1l}+a_l)=\sum_{i=1}^{\infty} b_i \frac{\mu_i}{\beta_l} C_{il}$$

$$\frac{a}{2}(\beta_1\delta_{1l}-\beta_l a_l)=\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i b_i D_{il}. \qquad (21)$$

但シ $\delta_{1l}=\begin{cases} 1 & \cdots\cdots l=1 \\ 0 & \cdots\cdots l\neq 0 \end{cases}$

コレヨリ a_l ヲ消去シテ

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_i}{\beta_l}(C_{il}+D_{il})b_i = a\delta_{1l}. \qquad (22)$$

ガ得ラレル。b_i ハコノ方程式ノ解トシテ求メラレル。例ヘバ b_1（入射波ト同ジ型ノ透過波ノ振幅）ハ

$$b_1 \begin{vmatrix} a & \frac{\mu_2}{\beta_1}(C_{21}+D_{21}) & \frac{\mu_3}{\beta}(C_{31}+D_{31}) & \cdots \\ 0 & \frac{\mu_2}{\beta}(C_{22}+D_{22}) & \frac{\mu_3}{\beta}(C_{32}+D_{32}) & \cdots \end{vmatrix} \div \det\left|\frac{\mu_i}{\beta_l}(C_{il}+D_{il})\right|$$

$$= \frac{\beta_1}{\mu_1} a \begin{vmatrix} C_{22}+D_{22} & C_{32}+D_{32} \cdots \\ C_{23}+D_{23} & C_{33}+D_{33} \cdots \end{vmatrix} \div \det\left|C_{il}+D_{il}\right|. \quad (23)$$

前ノ圖（II）ノ場合デE—基本波ガ入射スル場合ハ U_-，U_+ ハ次ノ様ニナル

$$U_- = \sum_{l=1}^{\infty} a_l e^{-i\beta_l y} \sin \alpha_l x$$

$$u_+ = e^{-i\mu_1 \varphi} \phi(r) + \sum_{i=1}^{\infty} b_i e^{i\mu_i \varphi} \phi_i(r) \quad (24)$$

コノ場合上記ト同様ニシテ a_l, b_i ヲ求メレバ，其ノ結果ハ次ノ如クナル

$$\sum_l (C_{il}+D_{il}) a_l = 2\delta_{1i} \quad (25)$$

$$a_1 = 2 \begin{vmatrix} C_{22}+D_{22} & C_{23}+D_{23} \cdots \\ C_{32}+D_{32} & C_{33}+D_{33} \cdots \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix} \div \det\left|C_{il}+D_{il}\right| \quad (26)$$

（透過波ノ振幅）

$$\sum_i \frac{\mu_i}{\beta_l} (C_{il}+D_{il}) b_i = \frac{\mu_1}{\beta_l} (-C_{il}+D_{il}) \quad (27)$$

$$b_i = - \begin{vmatrix} C_{11}-D_{11} & C_{21}+D_{21} & \cdots \\ C_{12}-D_{12} & C_{22}+D_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \div \det\left|C_{il}+D_{il}\right|. \quad (28)$$

（反射波ノ振幅）

H—基本波ノ場合モ同様デ（i）ノ場合ハ次ノ如クデアル

$$\left.\begin{aligned} U_- &= e^{i\beta_0 y} \sin \gamma_1 z + \sum_{l=0}^{\infty} a_l e^{-i\beta_l y} \cos \alpha_l x \sin \gamma_1 z \\ u_+ &= \sum_{i=0}^{\infty} b_i e^{i\mu_i \varphi} \phi_i(r) \sin \gamma_1 z \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

但シ

但シ

$$\gamma_1 = \frac{\pi}{c}\ ,\quad \beta_0 = \sqrt{k^2 - \gamma_1^2}$$

$$\alpha_l = \frac{l\pi}{a}\ ,\quad \beta_l = \sqrt{k^2 - \alpha_l^2 - \gamma_1^2}$$

$\phi_i(r)$ ノ i ハ α_l ノ l ト歩調ヲソロヘテ0カラ数ヘ始メルコトニスル．今度ハ C_{il} D_{il} ヲ

$$C_{il} = \frac{\beta_l}{\mu_i}\int_0^a \phi_i(r)\cos\frac{l\pi x}{a}dx \qquad (30)$$

$$D_{il} = \int_0^a \frac{\phi_i(r)}{r}\cos\frac{l\pi x}{a}dx.$$

ヲ定義スレバ

$$\sum_l (C_{il} + D_{il})a_l = C_{i0} - D_{i0} \qquad (31)$$

カラ a_l ガ求メラレル．例ヘバ a_0（反射波ノ振幅）ハ

$$a_0 = \begin{vmatrix} C_{00}-D_{00} & C_{01}+D_{01} & \cdots \\ C_{10}-D_{10} & C_{11}+D_{11} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \div \det\left|C_{il}+D_{il}\right| \qquad (32)$$

トナリ．又

$$\sum_i \frac{\mu_i}{\beta}(C_{il}+D_{il})b_i = 2a\,\delta_{l0} \qquad (33)$$

カラ b_i ガ求メラレル．透過波ノ振幅 b_0 ハ

$$b_0 = 2a\frac{\beta_0}{\mu_0}\begin{vmatrix} C_{11}+D_{11} & C_{21}+D_{21} & \cdots \\ C_{12}+D_{12} & C_{22}+D_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \div \det\left|C_{il}+D_{il}\right| \qquad (34)$$

トナル。

ロ一基本波ノ（1 1）ノ場合ハ

$$\left.\begin{aligned} U_- &= \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell e^{-i\beta_\ell y}\cos\alpha_\ell x \sin\gamma_1 Z \\ U_+ &= e^{-i\mu_0\varphi}\psi_0(r)\sin\gamma_1 Z + \sum_{i=0}^{\infty} b_i e^{i\mu_i\varphi}\psi_i(r)\sin\gamma_1 Z \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

$$\sum_\ell (C_{i\ell}+D_{i\ell})\, a_\ell = 2\delta_{0i} \quad (36)$$

$$a_0 = 2\begin{vmatrix} C_{11}+D_{11} & C_{12}+D_{12} & \cdots \\ C_{21}+D_{21} & C_{22}+D_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \div \mathrm{Det}\{C_{i\ell}+D_{i\ell}\} \quad (37)$$

（透過波ノ振幅）

$$\sum_i \frac{\mu_i}{\beta_\ell}(C_{i\ell}+D_{i\ell})\, b_i = \frac{\mu_0}{\beta_\ell}(C_{0\ell}-D_{0\ell}) \quad (38)$$

$$b_0 = -\begin{vmatrix} C_{00}-D_{00} & C_{10}+D_{10} & \cdots \\ C_{01}-D_{01} & C_{11}+D_{11} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \div \det\{C_{i\ell}+D_{i\ell}\} \quad (39)$$

（反射波ノ振幅）

實際ノ計算デハ．勿論無限次行列式ノ計算ハ有限次ニトドメテ近似的ニ行フ外ハナイ．其ノトキ．彎曲部ノ曲率ガ小ナラバ反射係數モ又Oberton ノ係數モ小ニナルベキコトガ期待サレ，從ツテ無限次ヘノ極限移行ノ收斂ハ良好トナルコトガ期待サレル。（實際ハ可成ノ曲率デモ收斂ガヨイ）

§6. 圓形ニ彎曲シタ導波管中ノ波動函數ト波長

$\psi_i(r)$ トソレニ附隨スル μ ヲ求メル問題ヲ考ヘル。コレガ充タスベキ方程式ト境界條件ハ次ノ通リデアル

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\psi}{dr}\right)+\left(k^2 r-\frac{\mu^2}{r}\right)\psi=0 \quad (\gamma=0\ ノ\ \mathrm{E}一波ノ場合) \quad (40)$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\psi}{dr}\right)+\left(k'^2 r-\frac{\mu^2}{r}\right)\psi=0 \quad (\gamma=\gamma_1\ \mathrm{E}一波ノ場合) \quad (41)$$

但シ $k'=\sqrt{k^2-\gamma_1^2}$

$r=r_1,\ r=r_2$ デハ $\psi=0$.

$$\frac{d\phi}{dr}=0$$

コヽデ例ヘバ(40)ノ方ヲトレバ．解ハ (42)

$$\phi=AJ_\mu(kr)+BY_\mu(kr)$$

トナリ・境界條件ノ $\phi=0$ カラ μ ヲ定メル式ハ

$$J_\mu(kr)Y_\mu(kr)-J_\mu(kr)Y_\mu(kr)=0 \qquad (43)$$

トナルガ。コレカラ μ ヲ定メル事ハ Bessel 函數表ガ完備シテキナイカラ困難デアル

彎曲部ノ曲率ガ余リ大キクナイ時ハ（曲率ガ相當大キクテモヨイ實際的ナ方法トナルガ）次ノ方法ガ都合ガヨイ。ソレハ、$\phi(r)$ ヲ $x(=r-r_1)$ ニツイテ Fourier ノ級數ニ展開スルコトデアル。

以下長サノ單位トシテ $\pi/k=\lambda/2$（(40)ニ相當シテ）或ヒハ $\pi/k'=\lambda'/2$（(41)ニ相當シテ）ヲトル◎

サウスレバ(40).(41)ハ

◎コノトキ β_l ハ夫々 $\beta_l=\pi\sqrt{1-l^2/a^2}$，$\beta_l=\frac{\pi}{\lambda}\sqrt{1-l^2/a^2}$ トナル

（式ノ形ハ同ジデアルガ a ガ例ヘバ夫々 7cm .45cm ）

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\phi}{dr}\right)+\left(\pi^2r-\frac{\mu^2}{r}\right)\phi=0 \qquad (44)$$

トナル。コレノ解ヲ境界條件ノ $\phi=0$．$\frac{d\phi}{dr}=0$ ノ下ニ求メルノデアルガ 次ノ樣ニ置ク

$$\phi=\sum_{s=1}^{\infty}A_s\frac{\sin}{\cos}\alpha_s x \qquad (45)$$

之ヲ(44)ニ代入シテ、ソノ式ニ $\frac{\sin}{\cos}\alpha_s x$ ヲ乘ジテ積分スレバ

次ノ[illegible]ル

$$\sum_t u_{st} A_t - \mu^2 \sum_t v_{st} A_t = 0$$

但シ

$$u_{st} = \int_0^a \left(\pi^2 \gamma \frac{\sin}{\cos} \alpha_s x \frac{\sin}{\cos} \alpha_t x - \alpha_s \alpha_t \gamma \frac{\cos}{\sin} \alpha_s x \frac{\cos}{\sin} \alpha_t x \right) dx$$

$$v_{st} = \int_0^a \frac{1}{\gamma} \frac{\sin}{\cos} \alpha_s x \frac{\sin}{\cos} \alpha_t x \, dx \qquad (47)$$

$(u_{st} = u_{ts}, \; v_{st} = v_{ts})$ (46)ヲ解クノニ先ヅ

$$\det \left| u_{st} - \mu^2 v_{st} \right| = 0 \qquad (48)$$

ヲ解イテ μ ヲ定メル（$\mu = \mu_i$）ソレカラ。コノ μ ヲ使ツテAガ定マル（$A_t = A_t^{(i)}$）コレニ規格條件ニヨリ

$$\sum_s \sum_t v_{st} A_s^{(i)} A_t^{(i)} = 1 \quad \left(\int_0^a \frac{1}{\gamma} \phi_i^2 dx = 1 \right) \qquad (49)$$

尙。$A_t^{(i)}, v_{st}$ ガ計算サレルト。C_{il}・D_{il} ハソレヲ使ツテ次ノ樣ニ求メラレル

$$C_{il} = \frac{\beta_l}{\mu_i} \sum_s A_s^{(i)} \int_0^a \frac{\sin}{\cos} \alpha_s x \frac{\sin}{\cos} \alpha_l x \, dx$$

$$= \frac{\beta_l}{\mu_i} A_l^{(i)} \varepsilon_l \frac{a}{2} \qquad \varepsilon_l \begin{cases} 2 \cdots l = 0 \\ 1 \cdots l \geqq 1 \end{cases} \qquad (50)$$

$$D_{il} = \sum_s A_s^{(i)} \int_0^a \frac{1}{\gamma} \frac{\sin}{\cos} \alpha_s x \frac{\sin}{\cos} \alpha_l x \, dx$$

$$= \sum_s A_s^{(i)} v_{sl} \qquad (51)$$

計算シタ例デハ(48)ヲ解イテ管内波長ヲ求メルト。ソレハ中心線ニ沿フテ計レバ（中心線ハ $\gamma = (\gamma_1 + \gamma_2)/2$ ）眞直ナ管ノ中ノ波長ト殆ンド變ラナイ事ガ分ツタ．委シクハ後述スル。

Fourier 級數ノ收斂モカナリヨイ

§7 U_{st} , V_{st} ノ計算公式

實際ノ計算ニ必要ナ公式ヲ揭ゲル

$$U_{st} = -a^2\left\{\frac{1}{(s-t)^2} \mp \frac{1}{(s+t)^2}\right\} + st\left\{\frac{1}{(s-t)^2} \pm \frac{1}{(s+t)^2}\right\}$$

- - - S ± t 奇數ノトキ

$$= \left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{32}st\right)\frac{1}{2}r_0 a$$

- - - S = t ≠ 0 ノトキ

$$= \pi^2 r_0 a$$

S = t = 0 ノトキ (E一波ノ場合ノミ)

$$= 0$$

- - - - - - 以上ノ外

但シ

$$r_0 = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$$

$\mp$, $\pm$ ノ上ノ符號ハ E一波ノトキ，下ノ符號ハ H一波ノトキニトル

$$V_{st} = W_{s-t} \mp W_{s+t}$$

$$W_p = \frac{1}{2}\int_0^a \frac{\cos \alpha_p x}{r}\,dx$$

W_p ノ計算ハ $\frac{r_0}{r}$ ヲ展開シテ

$$\frac{r_0}{r} = 1 + \frac{r_0 - r}{r_0} + \left(\frac{r_0 - r}{r_0}\right)^2 + \left(\frac{r_0 - r}{r_0}\right)^3 + \left(\frac{r_0 - r}{r_0}\right)^4 + \cdots$$

トシ，次ノ様ニ求メル

$$W_0 = \frac{1}{2}\int_0^a \frac{dx}{r} = \frac{1}{2}\log r\Big|_{r_1}^{r_0} = \frac{1}{2}\log\frac{r_0}{r_1}$$ (之ハ正確ナ式)

$$W_p = I_1^{(p)} + I_3^{(p)}$$ (p 奇數ノトキ)

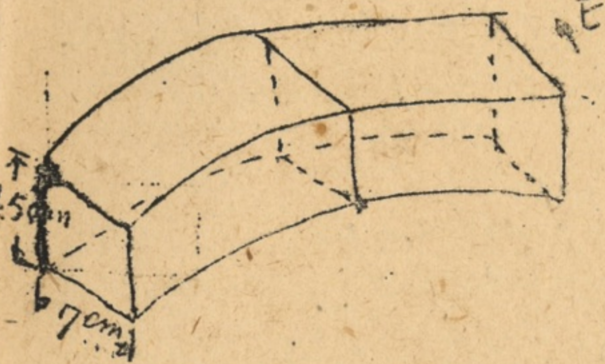
$$= I_2^{(p)} + I_4^{(p)}$$ (p 偶數，p ≠ 0 ノトキ)

但シ

$$I_n^{(p)} = \frac{1}{2r_0^{n+1}}\int_0^a (r_0 - r)^n \cos \alpha_p x\,dx$$

$$= \frac{a^2}{r_0^2\pi^2 p^2}\left\{n\left(\frac{a}{2r_0}\right)^{n-1} - n(n-1)I_{n-2}^{(p)}\right\}$$

§8 数値計算ノ結果



左ノ如キ場合デ．彎曲部ノ中心線ノ曲率半徑ガ $r_0=10^{cm}$ ノ時ハ行列式ヲ三次ニトツテ◎次ノ結果ヲ得タ

直線部分ノ管内波長 $\lambda'=14.29\,cm$

彎曲 〃 〃 $\lambda''=14.40\,cm$

（但シ中心線ニ沿フテ計ル）

直線部分カラ入射シタ E—基本波ノ反射波ノ振幅ハ

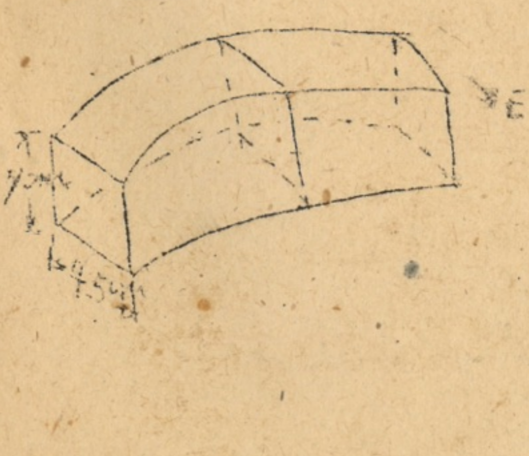
$|a| = 0.38\%$ （入射波ノ）

$\arg = 215°$ （ 180°+35° ）

彎曲部カラ入射シタトキハ絶對値ガ變ラズ arg ガ 35° ニナル

$r_0=15\,cm$ ノトキハ $|a|$ ガ 10cm ノ場合ノ約1/2 ニナル

◎ $\lambda'=\lambda''$ $|a|\approx 0$ ノ結果ハ三次迄トラナクトモ直チニ出ルガ．小サイ數字ハ三次迄トラナイト充分ニ出ナイ



左ノ場合ニハ $r_0=10\,cm.\ 15\,cm$ ノ二ツノ場合ニ行列式ヲ二次迄トツテ計算シタガ．其ノ結果ハ次ノ通リデアル（數字ハ[illegible]ニ正確デハナイガ，ソノ程度ハ正シイ筈デアル）

１０cm ノトキ

$$\lambda' = 14.29\,\mathrm{cm}, \quad \lambda'' = 14.23\,\mathrm{cm}$$

$$|a| = 0.30\% \quad \arg a = 217^\circ (= 180^\circ + 37^\circ)$$

１５cm ノトキ

$$\lambda' = 14.29\,\mathrm{cm}, \quad \lambda'' = 14.26\,\mathrm{cm}$$

$$|a_1| = 0.24\% \quad \arg a_1 = 219^\circ (= 180^\circ + 39^\circ)$$

但シ何レモ直線部分カラ H 一基本波ガ入射スル場合デアル。反對ノ場合ハ arg ガ１８０ 減ル

r_0 ＞ １５cm ノ場合ハ以上ノ結果カラ見テ問題トナラナイノデ委シイ計算ヲ行ハナカツタ　　　（終）