

空洞共振器と共軸ケー  
ブル又は Lecher 線との  
結合の理論

大阪帝國大學教授

永宮健夫

内 容  
I 基礎論

- § 1 緒言
- § 2 基礎の考へ
- § 3 共振電磁界の針金への作用
- § 4 針金を流れる電流に依つて起される  
共振器内の電磁界 直方体の場合
- § 5 一般の場合, Condon の理論
- § 6 前二者の比較

II 具体論

- 1 空洞に一つの loop が入つてゐる場合
  - 1a 外部から電波の入射の無い時の空洞  
内の振幅の減衰
  - 1b 空洞の一端を閉ぢた并軸ケーブル  
の一部を取付けた場合
- 2 一つの空洞に二つの loop を入れた場  
合。

以上



この問題を一般的に厳密に取扱ふ事は困難であるから、近似的な取扱ひとして以下では次の様を考へを基礎とする。

先づ電磁界を二つに分離して、一つは共振器に固有な振動電磁界とし、他は共振器中に入れられた針金に沿うた電信波の性質のものとする。この分離は一般に言へば明瞭な能力のみではあいか、或る條件の下に於て比較的明瞭なものとなるであろう。それは、空洞と外部との結合がゆるく、且つ振動数が適当であつて、空洞の或る固有振動(共振)にあつて、凡そ共振の状態にある振動の場合である。その時は空洞内の電磁界の大部分の様子は針金が存在しない場合と同様で、自由振動の一つの mode に近いから、これと独立な一つの對象として取出すことが許されよう。これをこゝでは *Resonatorfeld* と名付ける。残る電磁界は針金の近く附近に集中したもので——針金が細いから——これをやはり一つの独立な對象として扱ふことが許されよう。これを *Drahtfeld* と名付ける。但し、この *Drahtfeld* は針金上の電荷、電流とその相手となる壁上の電荷電流とによるもので、針金だけを依つて定まるものではない。故に針金の形、壁に対する位置が適当であつて、これを明確に定義することができよう。壁上の電荷、電流の大部分は *Resonatorfeld* にあつたものである。

結合がゆるいといふことは針金の空洞への入り方が少いといふことばかりにはあらず、針金が細いことも結合をゆるくする。針金が細いことは問題を一元化するにも役立つ。針金の入り口が小さく空洞の固有振動がそれのために衰らぬといふことも具合がよい。針金が細いと結合がゆるいといふのは次の様に説明される(§3の電信方程式のところでも説明する。) 針金を流れる電流を  $I$ 、針金の単位長  $k$  についての自己感応係数を  $L$  (これが定義できるとして)、*Resonatorfeld* の電界の針金に沿ふ成分を  $E_0$  とすれば、*Resonatorfeld* から針金に (*Drahtfeld* に) 与へられるパワーは

$$\int I E_0 ds.$$

(1)

一方針金を沿うに流れるエネルギーは(或いは Drahtfeld のエネルギー)

$$c \int L I^2 ds \quad (-c \int C V^2 ds) \quad (C = \text{容量}) \quad (2)$$

に依つて與へられる。今  $E_0$  と (2) とを與へられたものとする(即ち Resonatorfeld の強さと Drahtfeld のエネルギーとも與へる)。針金が細くあると共に  $L \rightarrow \infty$  であるから  $I \rightarrow 0$ 、従つて (1)  $\rightarrow 0$  とある。これは結合がゆるいといふことの一つの表現に外ならない。

### §3 共振電磁界と針金の作用

共振電磁界 (Resonatorfeld) が與へられたとしたときそれが針金に對して起す作用を先づ調べる。それを一般論的に扱ふことは差當つて困難である。針金の形、壁との相對的位置が複雑な要素として一般に入り込むであろう。こゝでは先づ特殊な二、三の場合を扱ひ、而して後出来るところはそれを一般化する。併しその特殊な場合は通常の多くの實際問題を近似的に含んでゐると思はれる。

(a) 共振軸が針金の壁に平行に與へられてお  
壁との距離又は入口の  $\text{dimension}$  に  
比し (入口の  $\text{dimension}$  は  $\text{dimension}$  に比し)

— 又は (i), (ii), (iii) 等

この場合は針金と壁との間に単位長さ當りの  $L, C$  を定義することが出来る。共振電磁界の電界強度  $E$  の針金を沿う成分  $E_0$  ならば、針金上の電流  $I$ 、壁に對する電圧  $V$  は近似的に次の方程式を満たす。

\* この式の基礎が今は現在充分に出来てゐない。これに對する一つの吟味については、P.1 脚註の別報告参照。最近 (7-8 月) 宮島龍舟氏もこれの或る一吟味を与へて居られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \lambda} + L \frac{\partial I}{\partial t} - E_d \\ \frac{\partial I}{\partial \lambda} + C \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

この方程式を解くに當つて考慮すべき境界条件は次の様  
 Kとす。

- 1 針金が壁の上で終つて居ればそこで  $V=0$ .
- 2 針金が途中で切れ居ればそこで  $I=0$ .
- 3 共軸ケーブルに接続するところでは共軸ケーブル  
 内の  $I, V$  と連続的に接続する。

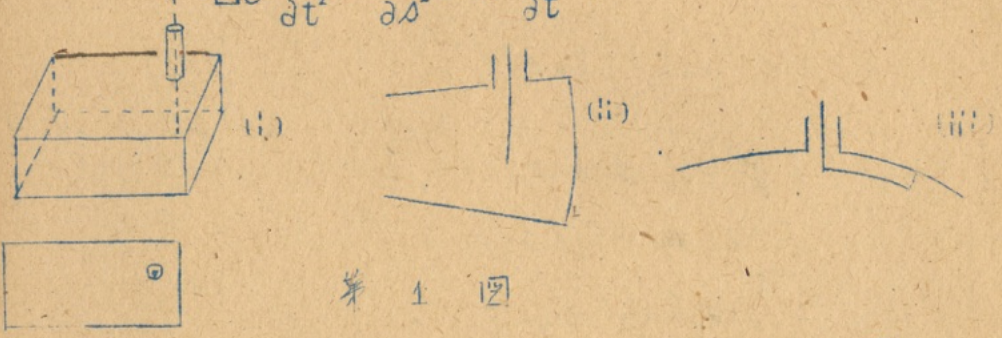
この境界条件も近似的なものではあるが併し (1) 式を  
 解くに當つては最も妥當なものである。

尚 (1) から  $V$  を消去すれば、

$$L \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - \frac{1}{C} \frac{\partial^2 I}{\partial \lambda^2} = \frac{\partial E_d}{\partial t} \quad (2)$$

即ち

$$LC \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 I}{\partial \lambda^2} = C \frac{\partial E_d}{\partial t} \quad (3)$$



第 1 図

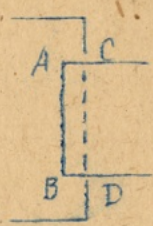
この式で  $LC = c^{-2}$  ( $c$  = 光速度) であるから、これは  $C \frac{\partial E_d}{\partial t}$  も非同  
 常項とする波動方程式である。針金の太さが  $zero$  にな  
 れば  $C \rightarrow 0$ 、従つて非同常項は消える。これは針  
 金の細ければ空洞と外部回路との結合がゆるい\*)と  
 いうことを表はしてゐる。

尚、針金が細ければ  $L, C$  は針金と壁との距離が多少変化  
 しても殆んど変化しないから上の議論は針金の壁に完全に  
 行はなくとも成立する。

\*) 針金の太さ  $\rightarrow 0$  の極限では針金上に  $\sin$  型の波が乗る  
 と仰ふ、佐藤 誠氏の定理の一つの説明になる。

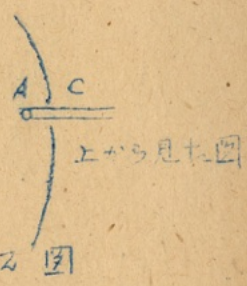
β) Lecher線 を入れた場合で、オーム図の AB が壁に平行、  
且 AC, BD が AB に比し短かい場合。

この場合も AB の単位長さにつき  
この L, C をとつて電信方程式 (1),  
(2) が成立する。通常  $AB \ll \lambda$  であ  
るから、AB 上では I は一定と見做され  
る。依つて (1) のオーム式を AB 上に積  
分して



$$V_A - V_B + L \cdot \overline{AB} \cdot \dot{I} = \int_B^A E_s ds. \quad (3)$$

$L \cdot \overline{AB}$  は AB 上の全自己感係数であ  
るから之を  $L_0$  と書く。之は針金を単位  
電流を流した時 BACD の面を通過  
する磁気感束に等しい。之を使つてオーム  
式は



$$V_A - V_B + L_0 \cdot \dot{I} = \int_B^A E_s ds. \quad (3')$$

こゝで右辺の積分は次の様に行ふことが出来る。即ち  
壁の上では E の切線成分が 0 であるから

$$\int_B^A E_s ds = \oint E_s ds.$$

$$\text{即ち } -\text{rot} E = \mu H \quad \text{より}$$

$$\oint E_s ds = -\mu \iint H_n dS.$$

但し  $H_n$  は面 BACD に垂直な H の成分、 $dS$  は面素片で  
ある。故に

$$\mu \iint H_n dS = F \quad (4)$$

と置けば、

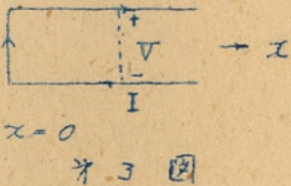
$$\int_B^A E_s ds = \oint E_s ds = -F. \quad (5)$$

故に (3') は

$$V_A - V_B + L_0 \dot{I} = -F. \quad (6)$$

尚、 $V_A - V_B = V$  と書けば

$$\underline{V + L_0 \dot{I} = -F.} \quad (7)$$



この式は Lecher 線上の  $I, V$  に対する境界条件 ( $x=0$  に於ける) とある。

尚、(1) の オ = 式は以上で考慮しおかつたが、これは電荷電流の保存式 (連続の方程式) であるから、

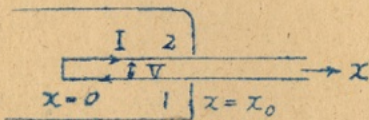
Lecher 線上でそれが満たされてゐれば、端も自然に満たされるから、特に考慮の必要はない。

δ) 幅の狭い Lecher 線が壁から離れたところと (又は壁と平行に) 長く入つて居る場合 — オ4 図 オ5 図

Lecher 線の各、1, 2 と名付けて、次の電信方程式が成立つ:

$$\left. \begin{aligned} L \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} &= E_{x2} - E_{x1}, \\ C \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\text{但し } V = V_2 - V_1. \quad (9)$$



この式と境界条件:

$$x=0 \text{ で } V=0$$

$x=x_0$  で内外の  $I, V$  が連続

の下に解けばよい。

やはり  $x_0 \ll \lambda$  ならば、上記の (8) の オ = 式を loop 全体に積分して

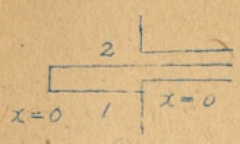
$$L x_0 \frac{\partial I}{\partial t} + V_{x=x_0} = \oint E_s ds. \quad (10)$$

即ち、 $L x_0 = L_0$ ,  $V_{x=x_0} = V$ ,  $\oint \mu H_n ds = F$  と書いて、

$$\underline{L_0 \dot{I} + V = -F.}$$

やはり (7) の式を得る。

δ) 一般の場合



第5図

一般には電信方程式が立つとは思はれぬ。但し針金の充分細くて、以上の様亦種々の場合に近似的に成立する様な場合は電信方程式も成立しやう。併し一般に(7)の式は成立することが期待される。即ち針金の loop (loop の形が何であらうともその長さが  $\ll \lambda$  であれば) の自己感応係数を  $L_0$ 。—  $L_0$  は針金に単位電流を通じた時 loop を通り抜ける磁気感応束 — とし、共振電磁界の loop を通り抜ける感応束を  $F$  とすれば、Faraday の法則に依つて

$$-\dot{F} = L_0 \dot{I}$$

は loop に生ずる e.m.f. である。故に

$$\nabla = -\dot{F} - L_0 \dot{I},$$

即ち  $L_0 \dot{I} + \nabla = -\dot{F}$

が成立つ。

§ 4. 針金と流れる電流に依つて起される共振器内の電磁界。直方体の場合

針金を流れる電流、或いは一般に共振器内に存在する電流 (電流流でよい) を源として如何なる電磁界が共振器内に存在するかを就いて考察する。始めは直方体の場合について Idertz のベクトル  $\Pi$  を使って議論する。次の § では一般の場合に就いて Condon の理論を述べる。これ二者を比較する。

先づ Maxwell の式は;

$$\begin{cases} \dot{B} = -\text{rot } E, & \text{div } B = 0, \\ \dot{D} = \text{rot } H - I, & \text{div } D = \rho, \end{cases} \quad \text{div } I + \dot{\rho} = 0.$$

Idertz のベクトル  $\Pi$ , 分極ベクトル  $P$  を導入して

$$\begin{cases} H = \text{rot } \Pi, \\ E = -\epsilon \mu \ddot{\Pi} + \text{grad } \text{div } \Pi, \end{cases} \quad (1)$$

$$\mathbf{I} - \dot{\mathbf{P}}, \quad \rho = -\operatorname{div} \mathbf{P} \quad (2)$$

とすると, Maxwell の式の中で  $\dot{\mathbf{D}} = \operatorname{rot} \mathbf{H}$  は残  
り, それは

$$\epsilon \mu \ddot{\Pi} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \Pi - \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi = -\frac{1}{\epsilon} \dot{\mathbf{P}} \quad (3)$$

とある。直線座標系ではこの式は

$$\epsilon \mu \ddot{\Pi} - \Delta \Pi = -\frac{1}{\epsilon} \dot{\mathbf{P}} \quad (4)$$

とある。  $\Pi, \mathbf{P}$  を  $e^{-i\omega t}$  に比例するとすれば (4) は

$$\Delta \Pi + k^2 \Pi = -\frac{1}{\epsilon} \mathbf{P} \quad (k^2 = \epsilon \mu \omega^2) \quad (5)$$

となり。

「先づ自由振動 ( $\mathbf{P} = 0$ ) の場合を復習する。

$\Pi = (0, 0, \Pi)$  とすれば, それは  $P_z$  を源とする型の電磁界  
であるか,  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  は

$$\begin{cases} E_x = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z}, & E_y = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial z}, & E_z = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + k^2 \Pi, \\ H_x = -\epsilon \frac{\partial \dot{\Pi}}{\partial y}, & H_y = \epsilon \frac{\partial \dot{\Pi}}{\partial x}, & H_z = 0 \end{cases} \quad (6)$$

となり,  $\Pi$  は

$$\Delta \Pi + k^2 \Pi = 0$$

から境界条件 ( $\mathbf{E}$  が壁に垂直,  $\mathbf{H}$  が壁に平行) を考  
慮して,

$$\Pi = \sin \alpha x \sin \beta y \cos \gamma z, \quad (7)$$

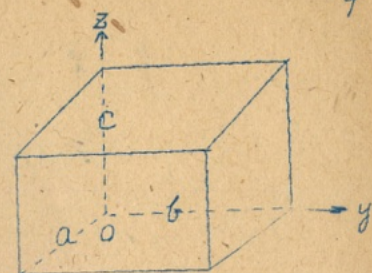
$$\alpha = \frac{l\pi}{a}, \quad \beta = \frac{m\pi}{b}, \quad \gamma = \frac{n\pi}{c} \quad \left( \begin{array}{l} l, m = 1, 2, 3, \dots \\ n = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = k^2$$

となり。よって

$$\begin{cases} E_x = -\alpha \gamma \cos \alpha x \sin \beta y \sin \gamma z, & H_x = -i\omega \epsilon \beta \sin \alpha x \cos \beta y \cos \gamma z \\ E_y = -\beta \gamma \sin \alpha x \cos \beta y \sin \gamma z, & H_y = i\omega \epsilon \alpha \cos \alpha x \sin \beta y \cos \gamma z \\ E_z = -(\alpha^2 + \beta^2) \sin \alpha x \sin \beta y \cos \gamma z, & H_z = 0 \end{cases} \quad (8)$$

とある、次に  $\Pi = (\pi, 0, 0)$ ,  $\Pi = (0, \pi, 0)$  として同様の結果が得られるか、これによつて得られる合計三種の電磁界は互に独立ではない\*。即ち今得られた  $E, H$  を順次  $\gamma, \alpha, \beta$  倍して加へれば OK である。依つて独立系二つとして、例へば  $(0, 0, \pi_z)$  と  $(-\beta\pi_x, \alpha\pi_y, 0)$  の二つの  $\Pi$  をとることが出来る。但し  $\pi_z, \pi_x, \pi_y$  は (7) 及び (8) から、 $x, y$  を交換して得られるもの、後者の  $\Pi$  は  $\text{div} \Pi = 0$  を満たし、 $E_z = 0$  の場を与へる。  $\text{div} \Pi = 0$  であり



$$\Pi = \frac{1}{\epsilon} \text{rot} \Gamma, \text{ 但し } \Gamma = (0, 0, \Gamma) \quad (9)$$

と置く事が出来る。  $\Gamma$  は所謂 Helmholtz のベクトルで、  
 $\Delta \Gamma + k^2 \Gamma = 0$ , 但し  $\Gamma = \cos \alpha x \cos \beta y \sin \gamma z$  (10)

を満し (9), (10), (1) であり

$$\begin{aligned} E &= -\mu \text{rot} \Gamma, \\ H &= \text{grad} \text{div} \Gamma - \epsilon \mu \ddot{\Gamma} \end{aligned} \quad (11)$$

と表はされる。  $x, y, z$  を順次に交換しても同様の結果が得られる。

さて上記の  $(0, 0, \pi)$ ,  $(\pi, 0, 0)$ ,  $(0, \pi, 0)$  の固有函数系のすべてを  $\{\Pi_\mu\}$  とする。これに伴ふ固有数  $(\alpha, \beta, \gamma)$  を  $\omega_\mu$ , 傳播定数を  $k_\mu (= \sqrt{\epsilon \mu} \omega_\mu)$  とする。  $\{\Pi_\mu\}$  は明らかに直交ベクトル系である。即ち

$$\int \Pi_\mu \Pi_\nu dV = 0, \quad (k_\mu \neq k_\nu)$$

依つて今規格条件も加へて

$$\int \Pi_\mu \cdot \Pi_\nu dV = \delta_{\mu\nu} \quad (\mu \neq \nu) \quad (12)$$

\*  $\alpha, \beta, \gamma$  の片側が一つか 0 であれば一種類しか得られない。片側 0 の時も  $\text{div} \Pi = 0$  は満たされる。

とする。

次に非同次方程式(4)に移る。この解及び  $\mathbf{P}$  は  $\{\pi_\nu\}$  の系で明らかに展開することか出来る。即ち

$$\boldsymbol{\pi} = \sum_{\nu} a_{\nu}(t) \boldsymbol{\pi}_{\nu}(x, y, z), \quad \mathbf{P} = \sum_{\nu} p_{\nu}(t) \boldsymbol{\pi}_{\nu}(x, y, z). \quad (13)$$

こゝに(12)を代入

$$p_{\nu}(t) = \int \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\pi}_{\nu} dV. \quad (14)$$

(13)を(14)に代入して両辺を較べれば次の式が得られる：  
 $\epsilon \mu \ddot{a}_{\nu}(t) + k_{\nu}^2 a_{\nu}(t) = \frac{1}{\epsilon} p_{\nu}(t).$

(但し  $\Delta \boldsymbol{\pi}_{\nu} + k_{\nu}^2 \boldsymbol{\pi}_{\nu} = 0$  を参照。) 即ち  $k_{\nu}^2 = \epsilon \mu \omega_{\nu}^2$  と置いて

$$\ddot{a}_{\nu}(t) + \omega_{\nu}^2 a_{\nu}(t) = \frac{1}{\epsilon^2 \mu} p_{\nu}(t). \quad (15)$$

又空洞の壁が完全導体であるためジュール熱の発生があることを形式的に考慮に入れるは、上式は

$$\ddot{a}_{\nu}(t) + Q_{\nu}^{-1} \omega_{\nu} \dot{a}_{\nu}(t) + \omega_{\nu}^2 a_{\nu}(t) = \frac{1}{\epsilon^2 \mu} p_{\nu}(t) \quad (16)$$

と変へられる。特に  $a_{\nu}(t), p_{\nu}(t) \propto e^{-i\omega t}$  の場合はこの式から  $a_{\nu}$  は

$$a_{\nu} = \frac{p_{\nu}}{\epsilon^2 \mu (-\omega^2 - i Q_{\nu}^{-1} \omega_{\nu} \omega + \omega_{\nu}^2)} \quad (17)$$

となる。かくして解が得られた。

尚、(14)の積分は、電流が針金上だけに存在することを考慮に入れると、針金に沿った線積分と直される。即ち  $\mathbf{I}$  を改めて針金上の全電流、 $\int$  を電荷の線密度として(今迄は両者皆空間的密度とに束ね)  $\mathbf{P}$  を(2)に依つて定義するとすれば(14)は

$$p_{\nu}(t) = \int \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\pi}_{\nu} ds = \frac{1}{-i\omega} \int \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\pi}_{\nu} ds \quad (18)$$

となり、特に  $\mathbf{I}$  の大きさが針金上で一定と見做される様な場合には

$$p_{\nu}(t) = \frac{\mathbf{I}}{-i\omega} \int \boldsymbol{\pi}_{\nu} \cdot d\boldsymbol{s} \quad (19)$$

となる。

1911, 電流がz方向のみあれば  $\Pi$  としても  $(0, 0, \Pi)$  と  
とつてよい。  $P = (0, 0, P)$  の  $P$  は次の様に展開される:

$$P = \sum_{\nu} p_{\nu}(t) \Pi_{\nu} = \sum_{l} \sum_{m} \sum_{n} P_{l m n}(t) \sin \alpha_l x \sin \beta_m y \cos \gamma_n z. \quad (20)$$

$$P_{l m n}(t) = \frac{8\pi^2 h^4}{abc} \iiint_0^{abc} P(x, y, z) \sin \alpha_l x \sin \beta_m y \cos \gamma_n z \cdot dx dy dz,$$

(但し  $\gamma$  は  $\gamma \neq 0$  の時,  $\gamma$  は  $\gamma = 0$  のとき) (21)

となる。尚 (8) を見ると明らかなる様に (21) は

$$\iiint I E_{l m n, z} dx dy dz$$

に比例する。併し一般に必ずしも  $P \cdot \Pi_{\nu}$  は  $I \cdot E_{\nu}$  に比例し  
ない。

上記の理論を一般の場合に拡張しようとするに  $\{\Pi_{\nu}\}$  系  
の直交性を於て困難を逢着する。

§ 5. 一般の場合, Condon の理論\*

$\Pi$  の代りに  $A$ ;  $\varphi$  を導入する, 即ち

$$B = \text{rot } A, \quad E = -\dot{A} - \text{grad } \varphi. \quad (1)$$

ここで Lorentz の条件:  $\epsilon \mu \dot{\varphi} + \text{div } A = 0$  を置くことは結局  
§ 4 の様なる  $\Pi$  を導入することと同じであるから, 以上は  
さうしない。

$$\text{div } A = 0 \quad (2)$$

とする。(1) に依つて Maxwell の式は

$$\epsilon \mu \ddot{A} + \text{rot rot } A + \epsilon \mu \text{ grad } \dot{\varphi} = \mu \dot{I}. \quad (3)$$

$$\text{div } \dot{A} + \text{div grad } \varphi = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (4)$$

\* Jour. Appl. Phys. (1941), 12, No. 2.

の二つ(及び(3), (4)から導かれる  $\text{div } \mathbf{I} + \rho = 0$ )と仮定し、  
(2)によつて(4)は

$$\text{div grad } \varphi = \Delta \varphi = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (5)$$

となる。これを解いて  $\varphi$  を定め、次に(3)、即ち

$$\epsilon \mu \ddot{\mathbf{A}} + \text{rot rot } \mathbf{A} = \mu \mathbf{I} - \epsilon \mu \text{ grad } \varphi \quad (3')$$

を解いて  $\mathbf{A}$  を定める。(5)を解くのに當つて  $\varphi$  に対する境界条件としては、壁の上では

$$\varphi = 0 \quad (\text{壁の上}) \quad (6)$$

となる。さうすれば  $\mathbf{E} \perp$  壁の条件及び  $\text{grad } \varphi \perp$  壁の関係に依り  $\mathbf{A}$  に対する境界条件は

$$\mathbf{A} \perp \text{壁} \quad (7)$$

となる。従つて  $\mathbf{H} \parallel$  壁となる。

$\text{div } \mathbf{A} = 0$  の意味。  $\mathbf{A}, \varphi$  は次の様な Eichtransformation で他の組に移れる

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 - \text{grad } \chi, \quad \varphi = \varphi_0 + \chi.$$

但し、 $\chi$  は全く任意の函数である。 $\mathbf{A}_0, \varphi_0$  が求められたい一つの解として  $\text{div } \mathbf{A} = 0$  を要求すれば、

$$\text{div grad } \chi = \text{div } \mathbf{A}_0.$$

この Poisson 方程式の解として  $\chi$  を求めればよい。

(6)の意味、壁の上で  $\chi = -\varphi_0$  と入れればよい。

先づ自由振動の場合を調べる。このときは  $\rho \equiv 0$  である。而して固有振動は次の方程式から定まる：

$$\epsilon \mu \ddot{\mathbf{A}} + \text{rot rot } \mathbf{A} = -\epsilon \mu \omega^2 \mathbf{A} + \text{rot rot } \mathbf{A} = 0. \quad (8)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots; \quad \omega = \omega_1, \omega_2, \dots$$

而して  $\text{div } \mathbf{A} = 0$  に依り容易に  $\{\mathbf{A}_i\}$  系の直交性が證明される。即ち\*)

$$\int A_\mu \cdot A_\nu dV = \delta_{\mu\nu} \tag{9}$$

次に強制振動に移る。(3')式の右辺の  $\text{div}$  は0であるから、これを  $\text{div} A_\nu = 0$  の  $\{A_\nu\}$  系で展開することから出よう。解とあてべき  $A$  は  $\text{div} = 0$  であるから  $\{A_\nu\}$  系で展開する。即ち

$$A = \sum_\nu a_\nu(t) A_\nu(r), \quad \mu I - \epsilon\mu \text{grad} \phi = \frac{1}{\epsilon} \sum_\nu p_\nu(t) A_\nu(r) \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon} p_\nu(t) &= \int (\mu I - \epsilon\mu \text{grad} \phi) \cdot A_\nu dV \\ &= \int \mu I \cdot A_\nu dV - \epsilon\mu \int \text{grad} \phi \cdot A_\nu dV. \end{aligned}$$

而して

$$\begin{aligned} \int \text{grad} \phi \cdot A_\nu dV &= \int \dot{\phi} A_{\nu n} ds - \int \dot{\phi} \text{div} A_\nu dV = 0, \\ (\text{何故ならば壁の上で } \phi = 0, \text{ 又到底 } \dot{\phi} \text{ ところで } \text{div} A_\nu = 0) \\ \therefore p_\nu(t) &= \epsilon\mu \int I \cdot A_\nu dV. \tag{11} \end{aligned}$$

又  $E_\nu = i\omega_\nu A_\nu$  であるから

$$p_\nu(t) = \frac{\epsilon\mu}{i\omega_\nu} \int I \cdot E_\nu dV = \frac{\epsilon\mu}{i\omega_\nu} \int I \cdot E_\nu ds \tag{12}$$

とある。I が針金に沿うて一定と見做されるときは I は積分記号外に出され、且つ (3.3) の計算と同様に

$$\begin{aligned} \int E_\nu ds &= \oint E_\nu ds = i\omega_\nu \mu \iint H_{\nu r} ds \\ &= i\omega_\nu \cdot F_\nu \tag{13} \end{aligned}$$

とあるから (12) は

$$p_\nu(t) = \epsilon\mu \cdot I F_\nu$$

とある

\*  $A_\nu$  は実ベクトルとする。然らざれば (9) の一方は共軛複素ベクトルで置きかへる。 $A_\nu$  が実だから以下の  $F_\nu$  も実になる。

次に(10)を(3')の中に入れて両辺の $A_\nu$ の係数を絞れば次の式が得られる:

$$\epsilon\mu\ddot{a}_\nu(t) + \epsilon\mu\omega_\nu^2 a_\nu(t) = \frac{1}{\epsilon} p_\nu(t),$$

即ち

$$\ddot{a}_\nu(t) + \omega_\nu^2 a_\nu(t) = \frac{1}{\epsilon^2\mu} p_\nu(t). \quad (15)$$

これは前の節の(15)と同じ形の式である。 $Q_\nu$ を形式的に入れても同(16)式の様々

$$\ddot{a}_\nu(t) + Q_\nu^{-1}\omega_\nu\dot{a}_\nu(t) + \omega_\nu^2 a_\nu(t) = \frac{1}{\epsilon^2\mu} p_\nu(t)$$

(16)

とある。この式と、§3の(7)又はその基となった電信方程式(1)とを聯立させて空洞の振動、針金上の電流分布及び電圧の関係を決定することが出来る。

### §6. 前二者の比較

Idertyのベクトルを使った理論では空洞内の電磁界を悉く固有振動の電磁界に分解しておるのに対し、Condonの理論では $A$ のみを固有振動の $A_\nu$ に分解し、 $\varphi$ の場は固有電磁界とは切離してみる。併し $\varphi$ に依つて記述される電磁界(実は磁界はなく電界だけ)は各瞬間に於て空洞内の電荷に依つて生ずる静電界に等しく、之は針金の附近に集中してゐるから、空洞が共振に近い状態にある場合、共振器内電磁界の主要部分(§2で考慮した Resonatorfield)に對しては余り関係が深い様々考へられる。然しは両理論は共振の近くでは一致することが期せられる。以下それら就いて調べよう。

§4の(7)に於て $\delta=0$ である場合は $\partial\Pi/\partial\delta=0$ で、従つて $\text{div}\Pi=0$ であるから、この場合は $\Pi$ を使つても $A$ を使つても又 $E$ を使つても全く同じで、両理論は固有振動の振幅に對して全く同一のものである。依つてこの場合は問題がない。

$\delta \neq 0$ , 一般に $\alpha, \beta, \delta$ の何れも0でない場合は三つづ

独立な  $\Pi$  があり、それは二つの独立な、同一周波数の電磁界を与へる。共振管内電磁界を与へる  $\Pi$  はその一次結合で近似され、特にその電界は二つの独立な固有電界の一次結合に依つて近似される。今三つの独立な  $\Pi$  を

$$\Pi_1 = (\pi_1, 0, 0), \Pi_2 = (0, \pi_2, 0), \Pi_3 = (0, 0, \pi_3)$$

但し、

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \cos \alpha x \sin \beta y \sin \gamma z, \\ \pi_2 &= \sin \alpha x \cos \beta y \sin \gamma z, \\ \pi_3 &= \sin \alpha x \sin \beta y \cos \gamma z. \end{aligned}$$

と記し、之等と相當する電界を  $E_1, E_2, E_3$  とする。二つの独立な電界は  $E^{(1)}, E^{(2)}$  と記す。さうすれば共振管内電磁界に對して

$$\begin{aligned} \Pi &\approx \sum_{\nu=1}^3 a_{\nu}(t) \Pi_{\nu}, \\ E &= \epsilon \mu \omega^2 \Pi + \text{grad div } \Pi \approx \epsilon \mu \omega^2 \Pi + \text{grad div } \Pi \\ &= \sum_{\nu=1}^3 a_{\nu}(t) (\epsilon \mu \omega^2 \Pi_{\nu} + \text{grad div } \Pi_{\nu}) = \sum_{\nu=1}^3 a_{\nu}(t) E_{\nu} \end{aligned}$$

となる。こゝで  $\omega \approx \omega_{\nu}$  と使用した。更け

$$E_{\nu} = C_{\nu} E^{(1)} + D_{\nu} E^{(2)} \quad (\nu = 1, 2, 3) \quad (11)$$

とすれば

$$E = \left( \sum_{\nu} C_{\nu} a_{\nu}(t) \right) E^{(1)} + \left( \sum_{\nu} D_{\nu} a_{\nu}(t) \right) E^{(2)}$$

依つて  $p_{\nu}(t)$  に對して

$$\sum_{\nu} C_{\nu} p_{\nu}(t), \quad \sum_{\nu} D_{\nu} p_{\nu}(t)$$

が問題となり、 $p_{\nu}(t)$  の個々のもの ( $\nu = 1, 2, 3$  の三つ) の夫々必要ではある。§4, (18) に依り

$$\sum_{\nu} C_{\nu} p_{\nu}(t) = \frac{1}{i\omega} \int \mathbf{I} \cdot \left( \sum_{\nu} C_{\nu} \Pi_{\nu} \right) d\mathbf{s}$$

$\sum_{\nu} D_{\nu} p_{\nu}(t)$  に就ても同様。故にこゝで  $\text{div} \left( \sum_{\nu} C_{\nu} \Pi_{\nu} \right) = 0$  とおける様に  $C_{\nu}$  (及  $D_{\nu}$ ) を選ぶことが出来れば、 $\sum_{\nu} C_{\nu} \Pi_{\nu}$  は  $\sum_{\nu} C_{\nu} E_{\nu}$  に比例することになり、積分は  $\mathbf{I} \cdot \left( \sum_{\nu} C_{\nu} E_{\nu} \right)$  の積分

となる。そこで尚

$$\sum_{\nu} C_{\nu} E_{\nu} = E^{(1)}, \quad \sum_{\nu} D_{\nu} E_{\nu} = E^{(2)} \quad (2)$$

とすることの出来れば、Condonの理論に達することとなる。  
 $\operatorname{div} \Pi = 0$  なる  $\Pi$ , 及びは 常数因数を除いては  $\Pi$  と  $E$  とは  
 この場合全じであるからこの  $E$  の二つを例へば

$$E^{(1)} - E_3 = (-\alpha \gamma \Pi_1, -\rho \gamma \Pi_2, (\alpha^2 + \beta^2) \Pi_3),$$

$$E^{(2)} - \frac{1}{k^2} (-\beta E_1 + \alpha E_2) = (-\beta \Pi_1, \alpha \Pi_2, 0)$$

ととり、この二つは互に直交する ( $\iiint E^{(1)} \cdot E^{(2)} dx dy dz = 0$ ).  
 此に  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  は前記の  $\sin, \cos$  の積である。これに依  
 つて  $E_1, E_2, E_3$  を書き表はせば

$$E_1 = ((\beta^2 + \gamma^2) \Pi_1, -\beta \alpha \Pi_2, -\delta \alpha \Pi_3) - \frac{-\delta \alpha E^{(1)} - \beta k^2 E^{(2)}}{\alpha^2 + \beta^2},$$

$$E_2 = (-\alpha \beta \Pi_1, (\gamma^2 + \alpha^2) \Pi_2, -\gamma \beta \Pi_3) - \frac{-\gamma \beta E^{(1)} + \alpha k^2 E^{(2)}}{\alpha^2 + \beta^2},$$

$$E_3 = E^{(1)}$$

とあり、~~よ~~  $k$

$$\frac{-\delta \alpha}{\alpha^2 + \beta^2} E_1 + \frac{-\gamma \beta}{\alpha^2 + \beta^2} E_2 + E_3 = \frac{\gamma^2}{\alpha^2 + \beta^2} E^{(1)}$$

$$\frac{-\beta k^2}{\alpha^2 + \beta^2} E_1 + \frac{\alpha k^2}{\alpha^2 + \beta^2} E_2 + 0 \cdot E_3 - \frac{k^4}{\alpha^2 + \beta^2} E^{(2)}$$

とあり、上の(1), (2)の關係が矛盾なく満される(2)の方  
 は右辺に 常数因数が入るか、それは  $E^{(1)}, E^{(2)}$  の規格化  
 に関したことで本質的でない。他の  $E^{(1)}, E^{(2)}$  と  
 つた時もこれが互に直交してみれば、上記のものから  
 直交変換で移られるから、同じことである。

以上を依つて  $\Pi$  を使つた取扱ひと Condon の理論  
 とが立方体の場合に一致することを示された。