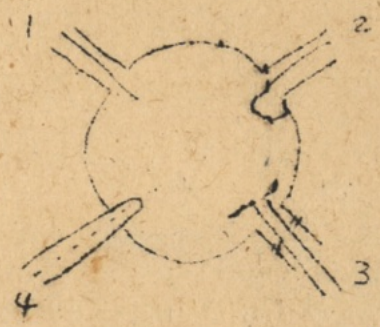


# 多端子空洞の特性について

宮島 龍 興

## 1. 多端子空洞の特性行列

空洞を共振器として使用する状態に於て、空洞の性質を研究する爲には閉じた系としての空洞の特性を調べただけでは不十分で、空洞にいくつかの平行線路又は電子流が結合された多端子としての空洞の特性を詳細に吟味することが必要である。吾々がこゝで取扱ふのはこのうち平行線路の結合された空洞である。



第一圖

空洞と平行線路との結合は弱いと假定し且つ實現されてゐる振動の周波数は、閉じた空洞のある一つの固有振動の固有周波数に近いものである假定する。その固有

振動の角周波数を  $\omega$ 、ベクトルポテンシャルを  $\mathbf{a}$  としこの  $\mathbf{a}$  は

$$\int \mathbf{a}^2 dV = 1 \tag{1.1}$$

によつて大きさをきめてあるものとする。こゝに  $V$  は空洞の容積である、この固有振動の振幅を  $A_0$  と書くと固有振動の電界及び

磁界は

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= -\frac{\partial A_0}{\partial t} \mathbf{a}_0 \\ |\mathbf{H}_0| &= \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{a} \end{aligned} \tag{1.2}$$

で與へられる。

空洞にはいくつかの針金が挿入されてゐるとする。第一圖ではその側を示してある。同軸ケーブル1、2及びレツヘル線3、4である。レツヘル線では二本が一組になつてゐるが、それを一處結合された二本の針金の組と考へ $3_1, 3_2$ の如く記すことにし、一般に針金の番號を $N_j$  ( $j=1, 2$ )で示すことにする。同軸ケーブルでは $j=1$ だけとみてよい。

$N_j$ 番目の針金を流れる電流を $I_{N_j}$ 、又空洞の出口の處から外向きに針金に沿ふてとつた長さを $z_{N_j}$ とする。従つて空洞の内部は $z_{N_j} < 0$ である。まうするとIの爲に空洞内に起される振動のうち固有振動 $\alpha$ の振幅 $A_0$ は

$$\frac{d^2 A_0}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q_0} \frac{dA_0}{dt} + \omega_0^2 A_0 = \frac{1}{\epsilon V} \sum_{N_j} \int I_{N_j} \alpha_{N_j} dz \quad (1.3)$$

によつて決定される。(Gondon : J. A. P. 12 (1941) 129—32)

こゝに $Q_0$ は空洞壁等に於けるエネルギーと空洞内に貯へられてゐる減衰を表す量とあつて、 $1/\omega_0$ の時間の中に消費されるエネルギーと外部から加へられる條件に従つて、

空洞内には種々の振動が起り得るわけであるが、實際に起つてゐる振動の周波數が空洞の固有周波數に近い時には空洞の内部の電磁界は、針金の近所をのぞいて、大部分その共振電磁界のみによつて充分近似出來ると考へられる。従つてその共振振幅を(1.3)によつ

て決定すれば、空洞内電磁界の大体の様子に分るわけである。

(1.3) を空洞強制振動の式と併せてよいだらう。

次に針金上の電流に対する空洞の反作用を考へる。これを正確に記載することは仲々困難であるが、こゝでは針金が充分細いとして近似的な式で満足することにする。一個針金に着目し、その電流を  $I$ 、空洞壁に対する電位差を  $V$  と書く。又單位長さあたりの誘導係數  $L$ 、容量  $C$  が定義され得るものとする。電流連続の方程式、及び外部より加はる電界  $E_2$  によつて電流の受ける變化を表はす式は、

$$C \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial z} = 0 \quad (1.4)$$

及び

$$L \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial z} = E_2 \quad (1.5)$$

と書くことが出来る。(1.5) は電流の變化の爲に生ずる動電方と、外部より加へられる動電方とのつり合を表はす式である。針金が充分細く、且つ曲率半径が長さ  $l$  に比して大きい時には、

$$C L = \epsilon \mu \quad (1.6)$$

なる式が一般に成立することが期待される

(1.5) に (1.4) を入れると

$$L \frac{\partial I}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{C} \frac{\partial I}{\partial z} \right) = \frac{\partial E_2}{\partial t} \quad (1.5')$$

を得る。之を空洞の針金に対する反作用の式と名付けよう。

(1.3) と (1.5) とが吾々の以下の考察の基礎になる式である  
 この兩式によつて空洞に対する外部電流の作用・空洞の反作用が共に表現されてゐるから・この式によつて外部回路も入れた空洞の特性を完全に記述することが出来る針金の空洞の外にある部分即ち  $z > 0$  では  $\mathbb{E} = 0$  であつて  $L$  及び  $\rho$  は常數であるから (1.5) の代りに

$$\epsilon \mu \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = 0 \quad (1.7)$$

となる。

扱・全ての量が時間的には  $\omega$  なる調和振動としてゐると、時間因子  $e^{-i\omega t}$  をもつものとする。さうすると (1.3)

(1.5) (1.7) は夫々

$$(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega_0\omega/G_0)A_0 = \frac{1}{\epsilon V_{N_j}} \int I a_{cz} dz \quad (1.5)$$

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\epsilon} \frac{dI}{dz} \right) + L\omega^2 I = +\omega^2 A_0 a_z \quad (1.5)''$$

$$\frac{d^2 I}{dz^2} + k^2 I = 0 \quad (1.7)$$

となる。こゝに  $k = \sqrt{\epsilon \mu} \omega$  で、 $k$  は波數を表はす。

扱  $z > 0$  では (1.7) の解を次の如く書く

$$I_{N_1} = -I_{N_2} = \sqrt{\frac{2}{Z_{N_1}}} (a_{N_1} e^{ikz_{N_1}} + b_{N_1} e^{-ikz_{N_1}}) \quad (1.8)$$

さうすると  $N_1$  と  $N_2$  との間の電位差は

$$V_N = z \sqrt{2 Z_N} (a_{N_1} e^{ikz_{N_1}} - b_{N_1} e^{-ikz_{N_1}}) \quad (1.9)$$

となる。こゝに  $Z_N$  は第  $N$  番目の平行線系の特性インピーダンスで

$$Z_{N_1} = \sqrt{\frac{L_{N_1}}{C_{N_1}}} = \sqrt{\frac{\epsilon_1 l}{C_{N_1}}} = \frac{L_{N_1}}{\sqrt{\epsilon_1 \mu}} \quad (1.10)$$

で表はされる量である。  $a_N$  は外向きの波、  $b_N$  は内向きの波の振幅之等の規準化は  $|a_N|^2$  が外向きに単位時間に流れ出るエネルギーを表はす様になつてゐる。それは、第  $N_j$  番目の平行線路から流れ出るエネルギー  $S_{N_j}$  計算してみれば分る様に

$$S_{N_j} = \frac{1}{2} V_{N_j} I_{N_j}^* \text{の實數部} = \frac{1}{2} |a_{N_j}|^2 - |b_{N_j}|^2 \frac{Z_{N_j}}{\text{秒}} \quad (1.11)$$

が成り立つからである。  $\left\{ \begin{array}{l} \text{レツヘル線間の容量 } C_N \text{ は } 2C_{N_1} = \\ 2C_{N_2} \text{ 又誘導係數 } L_N = \frac{1}{2} L_{N_1} = \frac{1}{2} L_{N_2} \\ \text{で従つて } Z_N = \frac{1}{2} Z_{N_1} = \frac{1}{2} Z_{N_2} \text{ である之に應} \\ \text{じて } a_N = \sqrt{2} a_{N_1} = \sqrt{2} a_{N_2} \text{ とおくと第 } N \text{ 口} \\ \text{から出てゆくエネルギー } |a_N|^2 = |a_{N_1}|^2 + |a_{N_2}|^2 \\ \text{は } |a_{N_1}|^2 \text{ とかける } b_N \text{ の意味も同様} \\ \text{である。} \end{array} \right.$

基礎の方程式は線型であるから、任意の境界条件の解を求め  
る爲には、いくつかの特定の条件の下での解を知つて置けば充  
分である。その条件として次の様にとつてみよう

$$b_{N'} = \delta_{N'N} = \begin{cases} 1 & N' = N \\ 0 & N' \neq N \end{cases}$$

即ち  $N$  以外 の出口は全て無反射にして置いて (これは無限  
に長い導線を使ふか、或は特性インピーダンスに等しい抵抗で  
短絡するかして出来る) 第  $N$  口から単位振幅の波を入れる場合  
に相當する

この条件の下で、各出口から出てゆく波の振幅を  $a_{N'}$  と書く  
ことにしよう。

$a_{n'n}$  は  $N$  から  $N$  への透射率.  $a_{nn}$  は反射率とも稱すべきものである. との様な  $a_{n'n}$  を  $n = 1, 2, \dots$  と全部の境界条件の下で求め得たとするとともに  $N^2$  個の量

$$(a_{n'n}) \quad (1.12)$$

が得られる. この量が朝永氏によつて多端子空洞の特性行列と呼ばれたものである.

入射波の振幅が  $b_n (n = 1, 2, \dots)$  であるとき. 第  $N$  出口から出てゆく波の振幅  $a_N$  は

$$a_N = \sum_{n'} a_{N'n'} b_n \quad (1.13)$$

と書くことが出来る. 従つて任意の境界条件の下で問題を解くことが出来るのである. 例へば第 1 口から単位波が入射し.  $N$  口の反射係数が  $\gamma_N$  である. 即ち  $b_N = \gamma_N a_N$  である場合にはこれを (1.13) に入れて

$$a_N = \sum_{n'} a_{N'n'} \gamma_N a_{n'} + a_{N1} \quad (N \neq 1)$$

$$a_1 = \sum_{n'} a_{1'n'} \gamma_N a_{n'} + a_{11}$$

となり之を解いて  $a_n$  が全て求まることになる.

この特性行列は種々の一般的に証明することも容易であるがこの論文では具体的な  $a_{n'n}$  の形を求めることが出来るのであるから. その結果を見れば直ちに分ることであるから説明は省略することにしよう

\* 性質を持ってゐる. また磁系で一般に知られたる相互定理に從つて  $a_{N'N}$  は対称である.  $RFS$

$$a_{N'N} = a_{NN'} \quad (1.14)$$

その他にエネルギー保存則に對應する性質 (1.12.2) による

## 2. 特性行列の計算

先づ針金上の電流を計算する. 第一圖の 1 又は 3 の様に針金の

先端が空洞内の空間で自由に終つてゐる場合にはそこで  
 $I = 0$ である。又2の様には壁で先端が終つてゐるときには  
 $V = 0$ 即ち  $\frac{\partial I}{\partial z} = 0$ である又レツヘル線が空洞内でループ  
 なつてゐる場合には、對稱點即ちループの中點で  $V = 0$ と考  
 へられるから、そこではやはり  $\frac{\partial I}{\partial z} = 0$ である。そこで  
 $I = 0$  又は  $\frac{\partial I}{\partial z} = 0$ になる點を  $z = -l$  とすると

$$z = -l \text{ で } I = 0 \quad (2.1)$$

又は

$$z = -l \text{ で } \frac{\partial I}{\partial z} = 0 \quad (2.2)$$

である。

方程式 (1.5)'' をこの境界條件の下で解く爲に先づ

同次方程式

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{1}{c} \frac{dI}{dz} \right) + L \omega^2 I = 0 \quad (2.3)$$

を考へる。この方程式の解で  $z = 0$  に於いて  $e^{\pm i k z}$  に一

際微分係數まで連続につながるものを  $\psi(z)$ ,  $\chi(z)$  とする。

この兩者は互に共軛複素量であつて明かに

$$\frac{1}{c(z)} \left( \psi \frac{d\chi}{dz} - \chi \frac{d\psi}{dz} \right) = \text{常數} \quad (2.4)$$

を満足するが、この常數は  $-\frac{2ik}{c}$  であること、 $c = 0$  は  $z > 0$   
 の部分におけるもので  $z$  によらぬ常數と見做し得る。

(1.5)'' の一般解は

$$I = \sqrt{\frac{L}{2}} (a_1 q + b_1 r) + \frac{i \omega c}{2 \sqrt{\epsilon \mu}} A_0 \left\{ \psi \int_0^z \chi a_{02} dz - \chi \int_0^z \psi a_{02} dz \right\} \quad (2.5)$$

と置くことが出来る。この非齊次項は  $z = 0$  で微分係数と共に 0 になるから (2.5) が  $z = 0$  で、 $z > 0$  の解 (1.8) と接続する爲には  $a, b$  は (1.8) の  $a, b$  と同じものであればよい。

境界条件 (2.1) 又は (2.2) によつて  $a, b$  間には一つの關係が得られる。夫々の場合に應じて

$$\alpha_{N_j} = \begin{cases} \gamma_{N_j}(-\beta_{N_j}) & (2.1) \text{ の場合} \\ \gamma_{N_j}'(-\beta_{N_j}) & (2.2) \text{ の場合} \end{cases} \quad (2.6)$$

及び

$$\beta_{N_j} = \int_{-\beta_{N_j}}^0 \gamma_{N_j} a_{0z_{N_j}} dz_{N_j} \quad (2.7)$$

と置くと、境界条件は

$$\sqrt{\frac{z}{z_{N_j}}} \{ a_{N_j} x_{N_j} + b_{N_j} x_{N_j}^* \} = \frac{z \omega}{2V \varepsilon_{N_j}} \{ x_{N_j} \beta_{N_j} - x_{N_j}^* \beta_{N_j}' \} C_{N_j} A_c \quad (2.8)$$

となる。

次に (2.5) を  $\Delta_0$  をきめる式 (1.3) に代入すると

$$\begin{aligned} & (\omega_0^2 - \omega^2 - d \omega_0 \omega / \omega_0) A_0 \\ & = \frac{1}{\varepsilon V} \sum_{N_j} \left[ \sqrt{\frac{z}{z_{N_j}}} (a_{N_j} \beta_{N_j} + b_{N_j} \beta_{N_j}') + \omega A_0 \gamma_{N_j} \right] \quad (2.9) \end{aligned}$$

となる。こゝに  $j = 1, 2$  の和を行ふ結果、 $\varepsilon_{N_j}$  はレッツヘル線の場合には 2、同軸ケーブルの場合には 1 である。(尚以上の考察ではレッツヘル線の突入場所は空洞に對して適當な對稱性をもつてゐるものとして計算した。これらの條件が成立しない時には事情が面倒になるのでその場合は除外した) 又こゝに

$$\gamma_{N_j} = \frac{C_{N_j}}{2V \varepsilon_{N_j}} i \int_{-\beta_{N_j}}^0 \gamma_{N_j} a_{0z_{N_j}} dz_{N_j} / \int_{-\beta_{N_j}}^0 \gamma_{N_j} a_{0z_{N_j}} dz_{N_j} \quad (2.10)$$

- 共扼複素 -

前に注した様に  $a_{N1} = -a_{N2} = \frac{1}{\sqrt{2}} a_N$ ,  $b_{N1} = -b_{N2} = \frac{1}{\sqrt{2}} b_N$ .

$c_{N1} = c_{N2} = c_N$  である。特性行列を求めるには  $L_N$

$= \delta_{N1}$  なるときの  $a_{N1} \equiv a_{N1N}$  を求めればよいその

爲にはレツヘル線に對しては

$$\left. \begin{aligned} a_N &= a_{N1} = a_{N2} \\ \beta_N &= 2\beta_{N1} = -2\beta_{N2} \\ \gamma_N &= 2\gamma_{N1} = 2\gamma_{N2} \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

とおく。さうするとレツヘル線と同軸ケーブルとは全く同じ形

で式の中に表はれ

$$\sqrt{\frac{2}{Z_N}} \{ a_N x_N + b_N x_N^* \} = \frac{i\omega}{\sqrt{2}\mu} \{ x_N \beta_N - x_N^* \beta_N^* \} c_N A_0 \quad (2.8)$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\omega_0/Q) A_0$$

$$= \frac{1}{\varepsilon V} \frac{\varepsilon}{N} \left\{ \sqrt{\frac{2}{Z_N}} (a_N \beta_N + b_N \beta_N^*) + \omega A_0 \gamma_N \right\} \quad (2.9)$$

$b_N = \delta_{N1N}$  を入れて (2.8) から  $a_N$  を解き、これを (2.9)

に入れて  $A_0^N$  ( $N$ をつけるのは第  $N$  口から単位波が入射して

きた時の空洞内振動の振幅の意味である) を求めこの様にして

$\delta_{N1N}$  を求めることが出来る。簡単な計算の結果

$$a_{N1N} = \frac{i B_N B_N}{\left( \frac{\omega}{2\omega_0} - \frac{\omega_0}{2\omega} - \Delta \right) + i \frac{1}{2Q}} - \frac{x_N^*}{x_N} \delta_{N1N} \quad (2.12)$$

$$A_0^N = \frac{i B_N / \omega}{\left( \frac{\omega}{2\omega_0} - \frac{\omega_0}{2\omega} - \Delta \right) + i \frac{1}{2Q}} \left( \frac{2}{\varepsilon V \omega_0} \right)^{1/2} \quad (2.13)$$

が得られる。こゝに

$$B_N = \left( \frac{c_N}{4\sqrt{2}\mu \varepsilon V \omega_0} \right)^{1/2} \frac{i (x_N \beta_N^* - x_N^* \beta_N)}{x_N} \quad (2.14)$$

$$\equiv \frac{1}{\sqrt{B_N}} c_N i F_N^c \quad -9-$$

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_N} \quad (2.15)$$

$$\Delta = -\frac{1}{2\epsilon\sqrt{\omega_0}} \sum_N \left[ \frac{C_N}{4\sqrt{\epsilon M}} \frac{i(x_N^2 \beta_N^2 - y_N^2 \beta_N^2)}{|x_N|^2} + \frac{1}{x_N} \right] \quad (2.16)$$

とおいた。(2.14)をみると $B_N$ の偏角と本質的に同じである。即ち $x_N^u/x_N$ の偏角は $B_N^2$ の偏角に等しい。従つて(2.12)はまた

$$a_{N'N} = e^{i(\theta_{N'} + \theta_N)} \quad (2.12')$$

ともかける

$$\times \left[ \frac{1}{\left( \frac{\omega}{2\omega_0} - \frac{1}{2\omega} - \Delta \right) + i \frac{1}{2Q}} - \delta_{N'N} \right]$$

これから $a_{N'N}$ の對稱性は明かである。

### 3. 特性行列についての一般的考察

一般に $B_N, \Delta, \frac{1}{Q_N}$ 等は小さい量である。従つて $\omega$ が $\omega_0$ に近い時を除くと $a_{N'N}$ の第一項は小さい量であり。従つて $a_{N'N} (N' \neq N)$ は非常に小さく $a_{NN}$ だけは1の程度である。即ち特別な場合(共振)を除いては一般に第 $N$ 口から入射した波は殆んど全部同じ口から反射し、他の口へは出て行かないことが分る。

次に(2.12)の分母を0にする $\omega$ を $\omega_c$ とかくことにする。 $\omega = \omega_c$ (之は一般的に複素数)では $a_{N'N}$ も $A_0^u$ 無限大になるが、このことは入射波が全くなくても、出て行く波が存在しうることを示してゐる。即ち全部の出口を

無反射にして置いて空洞内に振動を起しておいた時、それが相當に永い間エネルギーを保ち得ることを示してゐる。そこで境界條件を  $b_N = 0$  として解いてみると  $\omega = \omega_c$  の時には外向きの波は假の解が存在して

$$a_N = \left( \frac{\epsilon V_{c30}}{2} \right)^{1/2} \omega A_c B_N \quad (3.1)$$

である。  $\omega_c$  は

$$\frac{\omega_c}{2\omega_0} - \frac{\omega_0}{2\omega_c} - \Delta + \frac{1}{2Q} = 0 \quad (3.2)$$

の解である

$$\omega_c = \Omega_c - \frac{i\omega_0}{2Q} \quad (3.3)$$

とおくと  $Q^{-1}$  や  $\Delta$  の二次を省略して

$$\Omega_c = \pm \omega_0 (1 \pm \Delta) \quad (3.4)$$

である。  $A_c$  や  $a_N$  は全て  $e^{-i\omega_c t}$  なる因子をもつてゐるから、従つて時間的に減衰する因子  $e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$  を含むことになる。即ち エネルギーにすると  $e^{-\frac{\omega_0}{Q}t}$  を含み、これは一周期間に  $1/Q$  の割合でエネルギーが減少して行くことを示してゐる。  $\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_0} + \sum \frac{1}{Q_N}$  からみても分る様にエネルギーの減衰は第一に空洞内部での損失、次に各出口からもれ出る爲の損失から成ることが分る。實際 (3.1) から  $|a_N|$  は  $1/\epsilon_N$  に比例するが實際空洞内に貯へられてゐるエネルギーと  $|a_N|^2$  との比を計算してみれば  $\omega/\epsilon_N$  となつて上の豫想を確かめることが出

来るわけである。

尚 (3.4) からみて分る様に  $\Delta$  は共振用波数のずれの割合を表はす。(3.2) は  $\omega_c$  の二次式だから根は二つあつて。

$\omega_c = -\omega_0(1-\Delta)$  も根である然し乍らこれは共振用波数が二つあることを意味するものではない。それは  $\omega_c = -\omega_0$  の時には  $\Delta$  もその定義から  $\omega_c = \omega_0$  の時の  $\Delta$  と符號が逆だからである。それ故  $\omega_c > 0$  に限ることとする

$$\omega_c = \omega_0(1+\Delta) \quad (3.4)$$

だけを考へればよい。その時の  $\Delta$  は (2.16) に於いて  $\omega_c$  の實數部分を正として計算すればよい。

次に再びもとの境界条件にかへつて反射エネルギー及び傳達エネルギー  $S_{NN}$   $S_{N'N}$  ( $N' \neq N$ ) を計算しよう (2.12) より

$$S_{NN} = |a_{NN}|^2 = \frac{R^2 + \left(\frac{1}{Q_N} - \frac{1}{2Q}\right)^2}{R^2 + \frac{1}{4Q^2}} \quad (3.5)$$

$$S_{N'N} = |a_{N'N}|^2 = \frac{\frac{1}{Q_{N'}} \cdot \frac{1}{Q_N}}{R^2 + \frac{1}{4Q^2}} \quad (3.6)$$

となる。但  $LR$  は共鳴因子で

$$R = \frac{\omega}{2\nu_0} - \frac{\omega_0}{2\nu} - \Delta \quad (3.7)$$

を意味する。  $R$  は  $\omega \sim \omega_c$  で 0 になる。これによつてみると。

$|R|$  が  $\frac{1}{Q}$  よりも小さいときでない  $S_{N'N}$  は非常に小さいことが分る。従つて共振の幅は

$$|\omega - \Omega_c| \leq \frac{1}{2Q} \quad (3.8)$$

で裏へられる。

反射は一般に0にはならない。無反射の爲には

$$\left. \begin{aligned} R &= 0 \\ Q_N &= 2Q \end{aligned} \right\} (3.9)$$

が同時に成立することが必要である。従つて何んなに調節しても正確に共振した時でなくては無反射条件は成り立たない。

次に出口が二つの場合を考える。1からみて無反射の爲の条件は

$$\frac{1}{Q_1} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_2} \quad (3.10)$$

で、2からみて無反射であるためには

$$\frac{1}{Q_2} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_1}$$

が必要である。これは  $Q_0 = \infty$  のとき以外は同時には成立しない。即ち無反射条件は非對稱である。たと  $Q_0$  が  $Q_1$  や  $Q_2$  に比して充分大きいとき、即ち空洞内の損失が無視できるときには  $Q_1 \sim Q_2$  であれば無反射はなり得る。即ちこの時には二つの出口の結合の強さが同じ位であることが無反射の必要條件である。

次に  $S_{11}^{(V)}$  は  $Q_N^{-1}$  に比例する。即ち一度空洞内に入つたエネルギーは各出口からその結合の強さに比例して出てゆくことが分る。そしてこの割合はどこかの口からエネルギーを抜き

込んだ場合でも同じである。

(3.12) から又次の式を導くことが出来る。

$$\sum_{N''} a_{NN''} a_{N''N'}^* = \kappa \frac{i(\theta_N - \theta_{N'})}{2Q_0 \sqrt{Q_N Q_{N'}}} \left\{ \delta_{NN'} - \frac{1}{2Q_0 \sqrt{Q_N Q_{N'}}} \right\} \quad (3.11)$$

これから もし  $Q_0 = \infty$  即ち空洞が無損失なる場合には特任形

$$\sum_{N''} a_{NN''} a_{N''N'}^* = \delta_{NN'}$$

を満足する。即ち ユニテール行列であることが分る。空洞に損失があるとその性質は成り立たない

(3.11) で  $N = N'$  とおくとエネルギー保存則が得られる。

即ち

$$\sum_{N''} |a_{N''N}|^2 = 1 - \frac{\frac{1}{Q_0} \frac{1}{Q_N}}{R^2 + \frac{1}{4Q^2}} \quad (3.12)$$

これから、単位時間に空洞内で消費されるエネルギーは

$$\delta W^N = \frac{\frac{1}{Q_0} \frac{1}{Q_N}}{R^2 + \frac{1}{4Q^2}} \quad (3.13)$$

であることが分る。これに  $\frac{Q_0}{\omega}$  をかけると、大体空洞内に貯へられてあるエネルギーが分る。別に  $A_0^N$  から直接にエネルギーを計算しても同様の結果になつて、その値は

$$W^N = \frac{\frac{1}{Q_N}}{R^2 + \frac{1}{4Q^2}} \cdot \frac{1}{\omega} \quad (3.14)$$

である。(この式は  $\Delta^2$  の程度の近似である) 正確に共振した時に

$$\text{は } W^N = \frac{4Q^2}{Q_N} \frac{1}{\omega} \quad -14-$$

で、言ひかへれば一周期間に  $(\frac{1}{\omega})$  意味 流れ込むエネルギー  
 一  $\frac{4Q^2}{Q_N}$  倍が貯られることになる

無反射条件が  $N$  にたいして成立するときには  $B_{N,N}$  及  $W_N$   
 は最大となる。その最大値は

$$S_{N,N} = \frac{Q_N}{Q_{N1}}, \quad W^M = Q_N \frac{1}{\omega} \quad (3.15)$$

$W^M$  は大体  $\epsilon E_0^2 V$  の程度であるから、これによつて共  
 振時の空洞内の電界の程度をしらべることが出来る。即ち無  
 反射に毎秒 1 ジュールのエネルギーが流れ込んだときには

$$|E_0^N| \approx \left( \frac{Q_N}{\epsilon \omega V} \right)^{\frac{1}{2}}$$

であるが波長を  $\lambda$  とすると、

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}, \quad V \approx \left( \frac{\lambda}{2} \right)^3$$

$$|E^N| \approx \frac{20}{\lambda_{cm}} \sqrt{Q_N} \quad \text{Volt/cm} \quad (3.16)$$

である。それで入  $10 \text{ cm}$  とすると  $Q_N \sim 10^3$  にたいし  
 約  $60 \text{ Volt/cm}$  となる。之は平均値であるから最大は  
 この 2 倍位にはなり得る。入射エネルギー  $1 \text{ ジュール/秒}$  即  
 ち  $1 \text{ ワット}$  は  $1 \text{ mA}$ ,  $1000 \text{ Volt}$  でも  $1 \text{ A}$ ,  $1 \text{ mV}$  でも  
 空洞内の電界強度は同じである。尙この場合  $N$  における

$$\text{電圧の振幅は } V_N \approx \sqrt{2 Z_N}$$

で  $Z_N \approx 2\pi \epsilon$  とすると  $V \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \approx 60 \text{ Volt}$  である

即ち  $Q_N \sim 10^3$  位だと空洞内の電界と大体同じ位である。偏  
 でよくつくつた空洞では  $Q_0$  は  $10^4$  以上に出るゝので充分

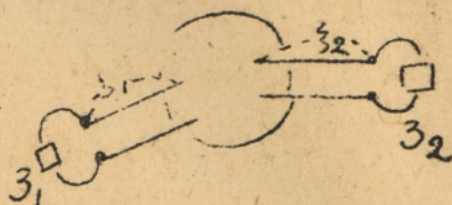
結合をよわくすると  $Q_N$  もその程度に出来る。そのときには空洞内の電界はもつと大きくなる。

#### 4. 四端子としての空洞

空洞の出口から  $z_N = \xi_N$  のと

ころ  $P_N$  を基準にとって電圧行

列を表はすと明かに



$$a_{NN}(\xi) = e^{ik(\xi_N + \xi_N)} a_{N'N} \quad \text{--- (4.1)}$$

である。 $a_{NN}$  に (2.12) を入れると

$$a_{NN}(\xi) = e^{i(\theta_N + \theta_N)} \left( \frac{\frac{i}{\sqrt{\alpha} \alpha_N'}}{R + i \frac{1}{2\alpha}} - \delta_{N'N} \right) \quad (4.2)$$

となる。こつに

$$\theta_N = \theta_N^0 + k \xi_N \quad (4.3)$$

である。このことから空洞の特性のうち  $\theta_N^0$  の方は  $\nu$  ツヘル線  
線の長さを調節することによって任意に変化させ得ることが分  
る。

空洞に二組の平行線路  $n = 1, 2$  がついてある場合を考える

この体系は四端子である。 $P_1$  及び  $P_2$  における値  $(V_1, I_1)$  (  $V_2, I_2$  ) なる二組の變數の間に次の線型の關係

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= A V_2 + B I_2 \\ I_1 &= C V_2 + D I_2 \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

示る。この  $A, B, \dots$  は線型パラメーターと呼ばれてゐる。

これは特値行列から次の様に計算される。  $P_N$  では

$$\left. \begin{aligned} V_N &= \sqrt{2Z_N} (a_N(\xi) - b_N(\xi)) \\ I_N &= \sqrt{\frac{2}{Z_N}} (a_N(\xi) + b_N(\xi)) \end{aligned} \right\} (4.5)$$

であるが、特値行列の性質によつて

$$\begin{aligned} a_1 &= a_{11} b_1 + a_{12} b_2 \\ a_2 &= a_{21} b_1 + a_{22} b_2 \end{aligned} \quad (4.6)$$

であるからこれらの式から  $a_1, a_2, b_1, b_2$  を消去すればよい。

簡単な計算によつて

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\frac{z_1}{z_2}} \frac{1}{2a_{12}} [a_{11} - a_{22} - 1 - a_{12}^2 + a_{11} a_{22}] \\ B &= \sqrt{z_1 z_2} \frac{1}{2a_{12}} [a_{11} + a_{22} - 1 + a_{12}^2 - a_{11} a_{22}] \\ C &= \frac{1}{\sqrt{z_1 z_2}} \frac{1}{2a_{12}} [a_{11} + a_{22} + 1 - a_{12}^2 + a_{11} a_{22}] \\ D &= \sqrt{\frac{z_2}{z_1}} \frac{1}{2a_{12}} [a_{11} - a_{22} + 1 + a_{12}^2 - a_{11} a_{22}] \end{aligned} \quad (4.7)$$

を得る。一般に成立すべき関係  $BC - AD = 1$  を検証することとは容易である。

(4.7) に (4.2) を入れると

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\frac{z_1}{z_2}} \sqrt{a_1 a_2} \left( \frac{\sin \theta_1 \sin \theta_2}{a_1} - \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{a_2} + 2R' \cos \theta_1 \sin \theta_2 \right) \\ &= \sqrt{\frac{z_1}{z_2}} \sqrt{a_1 a_2} A' \\ B &= \sqrt{z_1 z_2} \sqrt{a_1 a_2} i \left( \frac{\sin \theta_1 \cos \theta_2}{a_1} + \frac{\cos \theta_1 \sin \theta_2}{a_2} \right. \\ &\quad \left. + 2R' \cos \theta_1 \cos \theta_2 \right) \equiv \sqrt{z_1 z_2} \sqrt{a_1 a_2} B' \\ C &= \frac{1}{\sqrt{z_1 z_2}} \sqrt{a_1 a_2} \frac{1}{i} \left( \frac{\cos \theta_1 \sin \theta_2}{a_1} + \frac{\sin \theta_1 \cos \theta_2}{a_2} \right. \\ &\quad \left. - 2R' \sin \theta_1 \cos \theta_2 \right) \equiv \sqrt{\frac{z_1}{z_2}} \sqrt{a_1 a_2} D' \end{aligned}$$

$$D = \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}} \sqrt{Q_1 Q_2} \left( \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{Q_1} - \frac{\sin \theta_1 \sin \theta_2}{Q_2} - 2R' \sin \theta_1 \cos \theta_2 \right) \quad (4.8)$$

$$\text{但し} \quad \equiv \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}} \sqrt{Q_1 Q_2} D'$$

$$R' = R + \frac{i}{2Q} \quad (4.9)$$

点 p 1 から見た空洞の方のインピーダンス  $Z_{P_1}$  は  $\frac{V_1}{(-I_1)}$  である。今 P 2 にインピーダンス  $Z_2$  の負荷があるものとする  
と  $\frac{V_2}{I_2} = Z_2$  であるから

$$-Z_{P_1} = \frac{A Z_2 + B}{C Z_2 + D} = Z_1 \frac{A' \frac{Z_2}{Z_1} + B'}{C' \frac{Z_2}{Z_1} + D'} \quad (4.10)$$

となる。こゝに (4.8) を代入すると

$$\frac{Z_2 \cos \theta_2 - i Z_2 \sin \theta_2}{Z_2 \sin \theta_2 + i Z_2 \cos \theta_2} = X - i Y \quad (4.11)$$

とおいて

$$Z_{P_1} = \frac{i \cot \theta_1 \left( R + \frac{1}{2Q} \tan \theta_1 - \frac{X}{2Q_2} + \frac{i}{2} \left( \frac{1}{Q_0} + \frac{Y}{Q_2} \right) \right)}{R - \frac{1}{2Q_1} \cot \theta_1 - \frac{X}{2Q_2} + \frac{i}{2} \left( \frac{1}{Q_0} + \frac{Y}{Q_2} \right)} \quad (4.12)$$

を得る。

今これらの関係を用ひてこの空洞共振器の一端 p 1 に内部インピーダンス  $Z_1$  (負荷抵抗を有つ) を有する共振器をつけた

ときの吟味をするそのとき系に振動が起つてゐるために

$-Z_{P_1} = Z_1$  が成立せねばならない。(4.10) にこれを用ひて

$$2R + \frac{i}{2Q_0} \frac{Z_1 \cos \theta_1 - i Z_1 \sin \theta_1}{Z_1 \sin \theta_1 + i Z_1 \cos \theta_1} + \frac{1}{2} \frac{Z_2 \cos \theta_2 - i Z_2 \sin \theta_2}{Z_2 \sin \theta_2 + i Z_2 \cos \theta_2} \quad (4.13)$$

これが発振の条件式であつて、これから振動の周波数が定められる。この式を周波数  $\omega$  を未知数として解くに當つて  $\frac{1}{Q_2}$  は小さいものとして考へてあるから右邊では  $\omega = \omega_0$  として誤差は高次である。さう考へて

$$\omega = \omega_0 + \omega_0 (\alpha - i\beta) \quad (4.13)$$

とおくと、 $\alpha$  は周波数のずれの割合  $\beta$  は減衰度をあらはす振動が成長して行くためには  $\beta < 0$  でなくてはならない。

そこで (4.14) を (4.13) に用ひると

$$\begin{aligned} & 2(\alpha - i\beta) \\ &= -\frac{i}{Q_2} + \frac{1}{\theta_1} \frac{Z_1 \cos \theta_1 - i Z_1 \sin \theta_1}{Z_1 \sin \theta_1 + i Z_1 \cos \theta_1} + \frac{1}{\theta_2} \frac{Z_2 \cos \theta_2 - Z_2 \sin \theta_2}{Z_2 \sin \theta_2 + i Z_2 \cos \theta_2} \quad (4.14) \end{aligned}$$

となる。これの實数部分と虚数部分とを別々にとると夫々  $\alpha$  及び  $\beta$  を與へる式を得る。一般の場合は面倒であるから發振器のインピーダンスが純負抵抗の場合を考ると、(4.15)

から

$$\beta = \frac{1}{2Q_2} + \frac{Y}{2Q_2} - \frac{13, 1 Z_1}{2Q_1 (Z_1^2 \sin^2 \theta_1 + Z_1^2 \cos^2 \theta_1)} \quad (4.16)$$

及び

$$\alpha = \frac{1}{2Q_1} \frac{(Z_1^2 - Z_2^2) \sin \theta_1 \cos \theta_1}{Z_1^2 \sin^2 \theta_1 + Z_1^2 \cos^2 \theta_1} + \frac{X}{2Q_2} \quad (4.17)$$

これから次の結論を得る。

(\*) (4.16) から振動が成長するため即ち  $\beta \leq 0$  であるためには  $Q_1$  は

$$Q_1 \leq \frac{13, |Z_1|}{j_1^2 \sin^2 \theta_1 + Z_1^2 \cos^2 \theta_1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{Q_0} + \frac{Y}{Q_2}} \quad (4.18)$$

をみたす必要がある。従つて1の結合はこの程度に強い必要がある。この条件がみたされるときには振動は次第に成長しその振幅は増大して行く。而して  $j_1$  は一般に振幅の函数であらうからそれにつれて  $j_1$  が變化して行き。ついに(4.18)の等號が成立するに至つて成長がやむ。どういふ振動のときこの成長が止むかは  $\theta_1$  や  $\theta_2$  に関係する。そこで發振器の特性が判つてゐて  $j_1$  が振幅の函数として與へられてゐるならば如何なる  $\theta_1$  や  $\theta_2$  の共振をこれに結合したときこの振幅を最大にらしめ得るかを(4.18)によつて計算することが出来る。

(ii) (4.17) から  $\theta_1, \theta_2$  が十分大であれば  $\alpha$  は小であり従つて(4.14)によつて決定される  $\omega$  は  $j_1$  や  $j_2$  の變化に對して鈍感である。つて周波数の安定化が可能である。

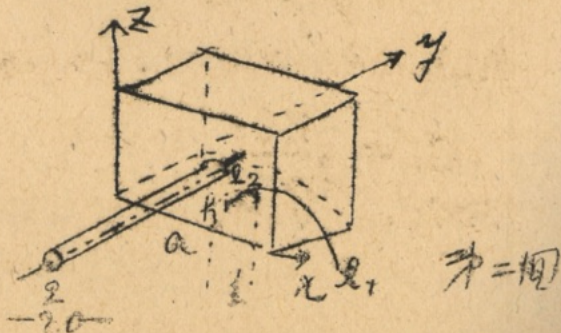
(iii) しかし前節のエネルギーの分配の考察から  $\theta_2$  を  $\theta_0$  より大きくとつては負荷へ流れるエネルギーより損失エネルギーの方が大になるから  $\theta_2$  はせいぜい大きくとも  $Q_0$  の程度に止めておかないと損である。

### 5. 定量的吟味

第二圖に示すやうに

稜の長さ  $a, b, c$

の六面体を考へ、内



部の振動はその電界

が  $y$  方向 をむい

てゐるものとする。

$$a_0 = (0, a_0, 0) \text{ 電}$$

$$a_0 = 2 \sin \frac{\pi x}{2} \sin \frac{\pi}{c} z (\sin \omega t)$$

$$E_y = -2 \omega \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi}{c} z (\cos \omega t)$$

$$H_x = -\frac{2}{\mu} \frac{\pi}{c} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi z}{c} (\sin \omega t) \quad (5.1)$$

$$H_z = \frac{2}{\mu} \frac{\pi}{a} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi z}{c} (\sin \omega t)$$

$\mu = 1$  の平行線回路は圖に示した様にループ型のロツヘル

線で、空洞内では圖の様に壁から高さ  $h$  のところに長さ  $l_1$

のアンテナになつてゐるものとする。

アンテナの部分でも波は  $e^{iky}$  の形になつてゐるとする

と定義より

$$\alpha_1 = i e^{-ikl_1/2}, \quad \theta_1 = \frac{kl_1}{2} - \frac{\pi}{2} \quad (4.2)$$

$$\beta_1 = 2 \int_{-l_1/2}^0 2 \sin \frac{\pi h_1}{c} e^{iky} dy = 4 \sin \frac{1 - e^{-ikl_1/2}}{ik} \quad (4.3)$$

故に (2.14) より

$$\frac{1}{Q_1} = \frac{\lambda^3}{\log \frac{l_1}{r_1} abc} \cdot \frac{8}{\pi^2} \sin^2 \frac{\pi h_1}{c} \sin^2 \frac{\pi l_1}{\lambda} \quad (4.4)$$

但し  $r_1$  は針金の半径で、ロツヘル線の容量として近似式を

$$C_1 = \frac{\pi \epsilon}{\log \frac{l_1}{r_1}} \quad (4.5)$$

用いた。

次に  $N=2$  の平行線路は同軸ケーブルの先端が  $(\frac{a}{2}, 0, \frac{c}{2})$

のところから  $y$  方向につき出して長さ  $l_2$

$$x_2 = e^{-ik_2 l_2}, \quad \theta_2^0 = k_2 l_2 = \frac{2\pi}{\lambda} l_2 \quad (4.6)$$

$$\beta_2 = - \int_{-l_2}^0 2l e^{-iky} dy = -2 \frac{1-e^{-ik_2 l_2}}{ik_2} \quad (4.7)$$

故に

$$\frac{1}{Q_2} = \frac{\lambda^3}{\log \frac{R_2}{r_2} a l e} \frac{4}{\pi^2} \sin^4 \frac{\pi l_2}{\lambda} \quad (4.8)$$

但し  $R_2$  は同軸ケーブルの外側圓柱の内径で容量

$$C_2 = \frac{2\pi\epsilon}{\log \frac{R_2}{r_2}} \quad (4.9)$$

とおいた。

固有波長入は

$$\lambda = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}}} \quad (4.10)$$

である

大きさの程度をみるために  $a, b, c$  を大体等しくとり且つ  $l$  や  $l_2$  は入に比して小さいとすると又  $\log$  の項は 1 の程度にとる。さうすると

$$\frac{1}{Q_1} \approx 8\sqrt{2}\pi^2 \left(\frac{h_1 l_1}{a^2}\right)^2 \quad (4.11)$$

$$\frac{1}{Q_2} \approx 2\sqrt{2}\pi^2 \left(\frac{l_2}{a}\right)^4$$

即ち  $\theta_1^{-1}$  はループの面積 (之はループを貫く磁束に比例する) の二乗に比例し、 $\theta_2^{-1}$  は長さ  $l_2$  の四乗に四列する。

例へば  $a = 10 \text{ cm}$  (入 = 14.1 cm) とし  $h_1 = l_1 = l_2 = 1 \text{ cm}$  とすると  $Q_1 \sim 10^2$ ,  $Q_2 \sim 4 \times 10^2$  の程度である。即ち

の位つき込むと $Q$ はすでに相當小さい値になつてゐる( $Q_0$ は $10^4$ の程度であるから)それ故空洞の特性を生かすためにはずつと弱く結合せねばならない。