§7 空洞のQと漏洩定数(假称)

前節に於て筒形共振器の例について共振現象の起る様子を調べた即ち共振の起る場合には其の近くで特性 matrix が異常な振動をするのである。而しより一般的な形の空洞で開口が三つ四つ等になるとその特性 matrix を前節で行った様な方法で吟味する事は出来ない。而して共振状態の近くでその特性 matrix が如何なる形をしてゐるかと云ふ事は一般的な考察でかなりの議論が可能である。一般の議論の場合には空洞の形を一定にして於て周波数 ω が可変であると考へ特性 matrix が ω の函数としてどう変化するかを吟味するのが適当であると思はれる。
そうすると ω を変化した時共振の鋭さと共振器のQとか或は空洞と開口の結合の強さとかの間にある関係が成立せねばならぬ事が判る。斯くして実験的研究に於ても個々の問題を取扱ふに当って或る程度は Parameter の個数を減らす事が出来て努力を節約する事が出来るかも知れぬし又そんな大した効能が無くても問題の見通しを良くする役が出来るかも知れない。
特性 matrix を ω の函数として求めると云ふ本題に入る前に回路系のQについて準備的の考察をして置く。
或る時刻に回路系内に或る振動が起ってゐたとしてそれが自然に放置してあると開口から波が漏洩して行くから系の「エネルギー」は次第に減衰して行く。(この他に系内の「オーム」抵抗に依る減衰があらうがこれは本論文では凡て無視しておく)振動の一周期の間に失はれる「エネルギー」でその系の有してゐる「エネルギー」を割ったものが所謂その回路のQである
この様な物理的事情に應じてQを求めやうと思ふ時には、

各開口で外向に出て行く波だけが存在すると云ふ管口條件で(1.1)或は(1.2)を解かねばならない。この様な解は実数のωでは不可能である。何故ならこの問題で回路内の電磁界は非周期的に減衰しておる筈だからである。 従って方程式(1.2)が各管口で外向きの波だけが存在すると云ふ條件の解を有する時にはωはある特別な複素数値を取らねばならない。

この様なωは幾つか存在するであらうがそれらをω_cと書く事にする。それをω_cを実部虚部に分けて

$$\omega_c = \Omega_c - \frac{i}{2}\Gamma_c \qquad (7.1)$$

と書く。而る時上の物理的考察からΓ_cは正である(この事は後に証明される)※ この自然放置の状態に於ては各管口に於て外向の波だけしかないのであるから導波管内で電磁界は、

$$\mathbb{E}_c(x_N\, y_N\, z_N) = \sum_e \alpha_e^N \mathbb{F}_e^{+} e^{i k_e^N z_N} \qquad (7.2)$$

$$\mathbb{H}_c(x_N\, y_N\, z_N) = \sum_e \alpha_e \mathbb{G}_e^{+} e^{i k_e z_N}$$

の形をしておる筈である。但し茲で$\mathbb{F}$や$\mathbb{G}$は(1.5)(1.6)の形のものであるがこれらの式のωの所には勿論今はω_cを用ひねばならぬ。

此處で係数αを決定するには方程式(1.2)を実際に解かねばならぬ。 然しこゝでそう云ふ各論的な問題に立入る事なしでαやΓやQの間に存在する一般的関係を求める。

それには再び§3の第二定理を用ひる 即ちこの定理に於て$\mathbb{E}\ \mathbb{H}$と$\mathbb{E}'$, $\mathbb{H}$との両方に対して$\mathbb{E}_c\ \mathbb{H}_c$を用ひるのであるそうすると

$$\int_S \left\{ [\mathbb{E}\times\mathbb{H}]_n + [\mathbb{E}\times\mathbb{H}]_n \right\} = dS = i(\omega_c - \omega_c^{*}) \int_V \left\{ \mu(\mathbb{H}^{*}\mathbb{H}) + \varepsilon(\mathbb{E}^{*}\mathbb{E}) \right\} dV$$

※ この時ω_cの実部分Ω_cがこの回路の共振周波数といふべきものに

なる事は次節で明になる。を得る。所で Poynting の理論に依って この式の両辺は夫々物理的意味を有してゐる 即ち

$$\frac{1}{4}\int_{v}\{\mu(\overset{*}{H}\cdot H)+\varepsilon(\overset{*}{E}\cdot E)\}dV=W \tag{7.4}$$

は系内に存在する電磁「エネルギー」を意味し

$$\frac{1}{4}\int_{s}\{[E\times \overset{*}{H}]_n+[\overset{*}{E}\times H]_n\}ds=S \tag{7.5}$$

は管口を通じて単位時間に失はれる「エネルギー」を表はす。
所が定義によって

$$Q=\frac{\Omega_c W}{S} \tag{7.6}$$

であるから この(7.4)(7.5)並びに(7.3)を用いて

$$Q=\frac{\Omega_c}{\Gamma_c} \tag{7.7}$$

を得る 斯くして
外向の波だけと云ふ管口條件を滿す様な解を許す處 周波数 ωc の実数部分を虚数部分の2部で割ったものが その回路のその状態に於けるQを與へると云ふ結論が得られた。
次に(7.2)を(7.5)に代入して計算を行ふと

$$S=\frac{1}{2}\sum_N\sum_e\left(\frac{\sqrt{\overset{*}{k}_{e}^{N}}}{\sqrt{k_e^N}}\overset{*}{\omega}_c+\frac{\sqrt{k_e^N}}{\sqrt{\overset{*}{k}_{e}^{N}}}\omega_c\right)|\alpha_e{}^N|^2\, e^{\,i(k_e{}^N-\overset{*}{k}_e{}^N)z_N} \tag{7.8}$$

が得られる。 回路のQが大きい場合には ωc の虚数部分は小さいから この式から近似時に

$$S=\Omega_c\sum_N\sum_e|\alpha_e{}^N|^2 \tag{7.9}$$

を得る。斯くして 一周期の間に失はれる「エネルギー」=

$$\sum_N\sum_e|\alpha_e{}^N|^2 \tag{7.10}$$

なる関係が得られる。一方§1の註で注意した所に依れば $|\alpha_e{}^N|^2$ は(7.2)の形の波の重畳のうち l 波に依りN開口から外に運ばれる一周期あての「エネルギー」である 従って(7.10)は一周期中に失はれるものゝ總和であるといふ自明の結論を示すのである。

序に(7.9)から $S>0$ が解り W は勿論 >0 が解り W は勿論 >0 である事から(7.6),(7.7)を通じて Γ_c が正である事が結論される。

斯くして波の漏洩の尺度として回路中に単位「エネルギー」が内蔵されてゐる時 N 口から l 波として洩れ出る波の振幅即ち

$$\beta_l^N = \frac{\alpha_l^N}{\sqrt{W}} \tag{7.11}$$

を用ひる事が出来る。　この β_l^N を考へてゐる回路の N 口 l 波に付ての漏洩定数の絶対値の二乗がこの波に依つて失はれる「エネルギー」の割合を示すものと考へてよい。その意味で

$$\frac{1}{Q_l^N} = |\beta_l^N|^2 \tag{7.12}$$

と置いて Q_l^N なるものを定義する事とする。　そうすると(7.1)(7.9)(7.11)などに由つて

$$\frac{1}{Q} = \sum_N \sum_l |\beta_l^N|^2 = \sum_N \sum_l \frac{1}{Q_l^N} |\beta_l^N|^2 = \sum_N \sum_l \frac{1}{Q_l^N} \tag{7.13}$$

が得られる。

§8 共振周波数に近い周波数に於ける特性 matrix

次に問題を本筋に戻して特性 matrix が ω 通常は実数の函数として如何なる形をするかと云ふ問題に歸へる

この時 ω が Ω_c に近付くと共振に相当した現象の起る事が先づ次の様にして明かになる。

一般に特性 matrix は ω の函数であるがこの時 ω が複素数であつても §2 の定義と其の儘形式的に適用する事は可能である。而るに ω が丁度 ω_c になると方程式 (1.2) の解の中には入射波は一つもなくて外向の波だけが存在すると云ふ形の解がなくてはならない。従つて ω が ω_c に近づくにつれて (2.2) の形の解の $a_{\ell'\ell}^{N'N}$ の無限に大きくならねばならない。※

(但し全部の $a_{\ell'\ell}^{N'N}$ が ∞ になる必要はないが少くとも一つは ∞ になる事を要する)。云ひかへれば特性 matrix を ω の函数と考へた時に $\omega \to \omega_c$ になると、その matrix 要素は少くとも一つは ∞ になる。$\omega = \omega_c$ に於て matrix A の要素が無限大になるとして、考へ得る最も簡単な場合は $a_{\ell'\ell}^{N'N}$ が ω_c に於て単純な Pole を有する時である。従つて ω_c の近傍に於て $a_{\ell'\ell}^{N'N}$ を次の様な形で近似する事が出来る。

$$a_{\ell'\ell}^{N'N} = \frac{\Omega_c\, q_{\ell'\ell}^{N'N}}{\omega - \omega_c} + \xi_{\ell'\ell}^{N'N} \tag{8.1}$$

但しこゝで $q_{\ell'\ell}^{N'N}$ は最早 ω に関係のない常数であつて $q_{\ell'\ell}^{N'N}$ の少くとも一つは 0 でない。(8.1) の右辺の第一項の分子に Ω_c を附けて置いたのは q の方を a や ξ のそれと合せる爲で他意は無い

実際問題に於ては ω は実数であるけれども回路が共振器としての機能を発揮するのに Q が十分大きいと考へてよいであらうから ω_c の虚数部分は非常に小さいものと考へてよい。

従って ω が Ω_c に近いから実数軸上の ω に対しても (8.1) が十分より近似で成立する範囲が存在する。斯くして Q の十分大きい回路に対しては (8.1) が※こう云つただけでは其の理由がはつきりしないかも知れないが (8.2) と (8.3) 式の話迄行けば明瞭になる。
(8.1) が実用になるだらう。其れ故 $q^{N'N}_{l'l}$ や $\xi^{N'N}_{l'l}$ の性質をもつと立入つて調べねばならない。
先づ (8.1) を (2.2) に代入すると ω が ω_c に近くにある時には

$$\begin{cases} \mathbb{E}^N_l(x_{N'}, y_N, z_{N'}) = \sum_{l'} \left\{\delta_{N'N}\delta_{l'l}\mathbb{F}_{l'} e^{-ih^{N'}_{l'} z_{N'}} + \xi^{N'N}_{l'l}\mathbb{F}_{l'} e^{+ih^{N'}_{l'} z_{N'}}\right\} \\ \quad + \dfrac{\Omega_c}{\omega-\omega_c}\sum_{l'} q^{N'N}_{l'l}\mathbb{F}_{l'} e^{+ih^{N'}_{l'} z_{N'}} \\ \mathbb{H}^N_l(x_{N'}, y_{N'}, z_{N'}) = \end{cases} \tag{8.2}$$

なる形の解を (1.2) は有してゐる事になる。我々の問題には重疊定理が成立するから (8.2) が問題の解であるから (8.2) の両辺に $\omega-\omega_c$ を乗じて得たもの

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(x_{N'}, y_{N'}, z_N) &= \sum_{l'} \left\{\delta_{N'N}\delta_{l'l}\mathbb{F}_{l'} e^{-ih^{N'}_{l'} z_N} + \xi^{N'N}_{l'l}\mathbb{F}_{l'} e^{+ih^{N'}_{l'} z_{N'}}\right\} \\ &\quad + \Omega_c \sum_{l'} q^{N'N}_{l'l}\mathbb{F}_{l'} e^{+ih^{N'}_{l'} z_{N'}} \\ \mathbb{H}(x_{N'}, y_{N'}, z_{N'}) &= \end{aligned} \tag{8.3}$$

の形の解が存在する。こゝで $\omega \longrightarrow \omega_c$ にすると右辺の第一項は 0 となるから この (8.3) は $\omega=\omega_c$ に於て外向の波のみを表はす解に他ならぬ
斯く考へて (7.2) と (8.3) とを比較して

$$\begin{cases} \mathbb{E}_c(x_{N'}, y_{N'}, z_{N'}) = \sum_{l'} \alpha^{N'}_{l'} \mathbb{E}_{l'} e^{+ih^{N'}_{l'} z_{N'}} \\ \quad = \mathrm{const}\,\Omega_c \sum_{l'} q^{N'N}_{l'l}\mathbb{F}_{l'} e^{+ih^{N'}_{l'} z_{N'}} \end{cases} \tag{8.4}$$

$\mathbb{H}_c(x_{N'}, y_{N'}, z_{N'})$ に付ても同様の関係を得る 但し茲に const とは比例常数を意味する。
(8.4) が成立する爲には $q^{N'N}_{l'l}/\alpha^{N'}_{l'}$ が N' l' に無関係な常数で

なければならない。　　この常数は尚N、lに関係するかも知れないから其れをα^N_lとおくと

$$q^{N'N}_{l'l} = q^{NN'}_{ll'}\gamma^N_l \qquad (8.5)$$

が成立する處がもともとmatrix $\|a^{N'N}_{l'l}\|$が対称的であつた事から

$$q^{N'N}_{l'l} = q^{NN'}_{ll'} \qquad (8.6)$$

が成立せねばならないから

$$\alpha^{N'}_{l'} = \gamma^{N'}_{l'}\delta \qquad (8.7)$$

が成立する但しこゝのδは最早$N'l'$にもNlにも関係しない常数である　斯くの如くして

$$q^{N'N}_{l'l} = \frac{1}{\delta}\alpha^{N'}_{l'}\alpha^N_l \qquad (8.8)$$

が成立し従つて茲で

$$\frac{1}{\sqrt{\delta}}\alpha^N_l = \beta^N_l \qquad (8.9)$$

と置くと（茲で前に(7.11)で定義した漏洩定数と同じ文字が現はれたがそれは心配しないでもよい．何故ならば後にこのβ^N_lと(7.11)のβ^N_lとが同一物になる事が証明されるからである）特性matrixは

$$a^{N'N}_{l'l} = \frac{\Omega_c\beta^{N'}_{l'}\beta^N_l}{\omega-\omega_c} + \xi^{N'N}_{l'l} \qquad (8.10)$$

の形に書き得る事になる。

次にこのβ^N_lが前の漏洩定数に外ならない事を証明せねばならない。前に開口の導波管が十分長い時にはmatrix $\|a^{N'N}_{l'l}\|$はUnitarである事を述べた（但しωは実数として）従つて．

$$\delta_{N'N}\delta_{l'l} = \sum_{N''l''}\sum a^{*N'N''}_{l'l''}a^{N''N}_{l''l}$$

$$= \frac{\Omega_c^2\beta^{*N'}_{l'}\beta^N_l}{|\omega-\omega_c|^2}\sum_{l''}\sum_{N''}|\beta^{N''}_{l''}|^2 \frac{\Omega_c\beta^{*N'}_{l'}}{\omega-\omega_c^*}\sum\sum\beta^{*N}_{l''}\xi^{N''}_{l''}$$

$$+\frac{\Omega_c\beta^N_l}{\omega-\omega_c}\sum_{N}\sum_{l''}\beta^{N''}_{l''}\xi^{*N''N'}_{l''l'} + \sum_{N''}\sum_{l''}\xi^{*N'N''}_{l'l''}\xi^{N''N}_{l''l}$$

或は書き直して　$\dfrac{\Omega_c\beta^N_l}{\omega-\omega_c}\left[\dfrac{\Omega_c\beta^{*N'}_{l'}}{\omega_c-\omega_c^*}\sum_{N''}\sum_{l''}|\beta^{N''}_{l''}|^2+\sum_{N''}\sum_{l''}\beta^{N''}_{l''}\xi^{*N''N'}_{l''l}\right]$

$$+\frac{\Omega_c\beta^{*N'}_{l'}}{\omega-\omega_c^*}\left[\frac{\Omega_c\beta^N_l}{\omega_c^*-\omega_c}\sum_{N''}\sum_{l''}|+\sum_{N''}\sum_{l''}\beta^{*N''}_{l''}\xi^{N''N'}_{l''l'}\right]$$

$$+\sum_{N''}\sum_{l''}\overset{*}{\xi}{}^{N'N''}_{l'l''}\,\xi^{N''N}_{l''l}=\delta_{l'l}\,\delta_{N'N} \qquad (8.11)$$

を得る。　これが ω に無関係に成立せねばならぬから

$$\sum_{N''}\sum_{l''}\overset{*}{\xi}{}^{N'N''}_{l'l''}\,\xi^{N''N}_{l''l}=\delta_{N'N}\,\delta_{l'l} \quad と \qquad (8.12)$$

$$\frac{\Omega_c\,\overset{*}{\beta}{}^{N}_{l}}{\omega_c-\overset{*}{\omega}_c}\sum_{N''}\sum_{l''}|\beta^{N''}_{l''}|^2=\sum_{N''}\sum_{l''}\xi^{NN''}_{ll''}\,\overset{*}{\beta}{}^{N''}_{l''}$$

$$\frac{\Omega_c\,\overset{*}{\beta}{}^{N}_{l}}{\omega_c-\overset{*}{\omega}_c}\sum_{N''}\sum_{l''}|\beta^{N''}_{l''}|^2=-\sum_{N''}\sum_{l''}\overset{*}{\xi}{}^{NN''}_{ll''}\,\beta^{N''}_{l''} \qquad (8.13)$$

とか出て来る。先づ(8.12)は即ち $\|\xi^{N'N}_{l'l}\|$ が Unitär と云ふ事を表はす $\|\xi\|$ matrix が Unitär といふ事を利用して(8.13)を解く事が出来る即ち(8.13)の第一式の両辺に $\xi^{N'N}_{l'l}$ を乗じて $\sum_N\sum_l$ すると $\frac{\Omega_c}{\omega_c-\overset{*}{\omega}_c}\sum_{N''}\sum_{l''}|\beta^{N''}_{l''}|^2\sum_N\sum_l \overset{*}{\xi}{}^{N'N}_{l'l}\,\beta^{N}_{l}=\overset{*}{\beta}{}^{N'}_{l'}$ そこで(8.13)の第二式を用いて(この時 ω_c の虚数部が負である事に注意して)

$$\frac{i(\omega_c-\overset{*}{\omega}_c)}{\Omega_c}=\sum_N\sum_l|\beta^{N}_{l}|^2 \qquad (8.14)$$

なる重要な関係が出来る(7.1)を用うるとこれは又 $\frac{\Gamma_c}{\Omega_c}=\sum_N\sum_l|\beta^N_l|^2$ (8.15)

と書き得る事になる。扨てこの β^N_l はもともと(8.7)(8.9)に依って α^N_l に比例したものであり依って(7.11)に依って漏洩定数に比例したものである。所でこの(8.15)を(7.13)と比べると(その中(7.7)を参考にして)直ちにこの比例常数が1である事が判る。即ちこの節で定義した β^N_l が§7で定義した漏洩定数そのものに外ならない事がこれで証明された事になる。(8.15)から

$$\Gamma_c=\Omega_c\sum_N\sum_l|\beta^N_l|^2 \qquad (8.16)$$

が得られるからこれを用いると

$$a^{N'N}_{l'l}=\frac{\beta^{N'}_{l'}\ \beta^{N}_{l}}{\frac{\omega^2}{\Omega_c}-1+\frac{i}{2}\sum_{N''}\sum_{l''}|\beta^{N''}_{l''}|^2}+\xi^{N'N}_{l'l} \qquad (8.17)$$

なる結果を得る。(8.17)の右辺第一項を観ると今 $|\beta^N_l|$ は小さいものと考へてゐるから一般の ω に対してこの項は極めて小さい。而るに ω/Ω_c が特に1に近い場合には例外的にこの項が1の程度の値を有する。即ち ω を変化させて行ったと考へた時 ω が Ω_c の所を通過する時この項は異常な振舞を呈する。これは即ち共振を意味する訳である。(8.17)の第一項が1の程度の値を持つためには ω/Ω_c-1 が大体 $\sum_N\sum_l|\beta^N_l|^2$ より小になればよい。

これを言葉で云ふと共振現象の起る範囲は、

範圍は $|\omega-\Omega_c| \lesssim \Omega_c \sum_N \sum_e |\beta_e^N|^2$ (8.18)

或は (7.13) を用ひて

$|\omega-\Omega_c| \lesssim \Omega_c/Q$ (8.19)

が共振の鋭さを決定する関係である。

(8.17)の結果と前の(6.20)の結果とを比べるとその形がよく似てゐる事が判る。前節では主として ω を一定として置いて ξ を変化する事を考へたが其の代りに ξ を一定にして ω を変化させて見ると先づ(6.21)を満たす共振周波数を Ω と書くものとし、即ち*

$$2\sqrt{\Omega^2/\mu\varepsilon-\lambda^2}\,\xi+\theta^{00}+\varphi^{00}=0 \tag{8.20}$$

として(6.20)を ω の函数としてこの Ω の近くで展開すると

$$\left\{\begin{aligned}
C^{11}(10) &= \frac{\frac{1}{2\xi\Omega\left(\frac{d\gamma^{0}}{d\omega}\right)_\Omega}|a^{10}||a^{10}|}{\left(\frac{\omega}{\Omega}-1\right)+\frac{i}{2}\frac{1}{2\xi\Omega\left(\frac{d\gamma^{0}}{d\omega}\right)_\Omega}\left\{|a^{10}|^2+|b^{20}|^2\right\}}e^{i(2\theta^{10}-\theta^{00}+\frac{\pi}{2})} \\
&\quad -e^{i(2\theta^{10}-\theta^{00})} \\
C^{21}(\omega) = C^{12}(\omega) &= \frac{\frac{1}{2\xi\Omega\left(\frac{d\gamma^{0}}{d\omega}\right)_\Omega}|a^{10}||b^{02}|\,e^{i(\theta^{10}+\varphi^{20}-\frac{\theta^{00}}{2}-\frac{\varphi^{00}}{2}+\frac{\pi}{2})}}{\left(\frac{\omega}{\Omega}-1\right)+\frac{i}{2}\frac{1}{2\xi\Omega\left(\frac{d\gamma^{0}}{d\omega}\right)_\Omega}\left\{|a^{10}|^2+|b^{20}|^2\right\}} \\
C^{22}(\omega) &= \frac{\frac{1}{2\xi\Omega\left(\frac{d\gamma^{0}}{d\omega}\right)_\Omega}|b^{20}||b^{02}|\,e^{i(2\varphi^{20}-\varphi^{00}+\frac{\pi}{2})}}{\left(\frac{\omega}{\Omega}-1\right)+\frac{i}{2}\frac{1}{2\xi\Omega\left(\frac{d\gamma^{0}}{d\omega}\right)_\Omega}\left\{|a^{10}|^2+|b^{20}|^2\right\}}-e^{i(2\varphi^{20}-\varphi^{00})}
\end{aligned}\right. \tag{8.21}$$

を得る。之と(8.17)とを比べて筒形共振器の漏洩定数は

$$\left\{\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{1}{2\xi\Omega\left(\frac{d\gamma^{0}}{d\omega}\right)_\Omega}}\,|a^{10}|\,e^{i(\theta^{10}-\frac{\theta^{00}}{2}+\frac{\pi}{4})}=\beta^1 \\
&\sqrt{\frac{1}{2\xi\Omega\left(\frac{d\gamma^{0}}{d\omega}\right)_\Omega}}\,|b^{20}|\,e^{i(\varphi^{20}-\frac{\varphi^{00}}{2}+\frac{\pi}{4})}=\beta^2
\end{aligned}\right. \tag{8.22}$$

で與へられる事がわかる。即ち筒形共振器の場合には漏洩定数を計算する事はその共振器を切断して得られた導波管に付て継目の波の透過定数をおめる事に帰着する *簡單な爲に $n=0$ とおいた。

(8.22)の両辺の絶対値の二乗をとると

$$\frac{1}{2\xi_\Omega\left(\frac{d\kappa^0}{d\omega}\right)_\Omega}|a^{10}|^2 = |\beta^1|^2$$

$$\frac{1}{2\xi_\Omega\left(\frac{d\kappa^0}{d\omega}\right)_\Omega}|b^{20}| = |\beta^2|^2 \tag{8.23}$$

を得るがこの関係に物理的意味をつける事も出来る。即ち$\left(\frac{d\kappa^0}{d\omega}\right)_\Omega$は筒の中を傳播する波の群速度の逆数を意味するから

$$N = \frac{1}{2\xi_\Omega\left(\frac{d\kappa^0}{d\omega}\right)_\Omega} \tag{8.24}$$

は一週期の間に波束が第四図のA或はBの處の面に「衝突」する回数を與へる。而るに一回の「衝突」に於ては$|a^{10}|^2$或は$|b^{20}|^2$が夫々1の口或は2の口から透過して出て行くのであるから$N|a^{10}|^2$或は$N|b^{20}|^2$が夫々1の口或は2の口から一周期の間に漏れて出る波の「エネルギー」を與へる事になるのである。

(8.21)に於ては更に$\|\xi^{N'N}_{l'l}\|$が次のmatrixとなつてゐる事が判る。

$$\|\xi\| \begin{pmatrix} -e^{i(2\theta^{10}-\theta^{00})} & 0 \\ 0 & -e^{i(2\varphi^{20}-\varphi^{00})} \end{pmatrix} \tag{8.25}$$

$\|\xi\|$がこの様に単純な形になる事は問題の特種事情に由る事であつて一般論からは出て来ない。一般論から云へる事は$\|\xi\|$がUnitarである事と更に(8.14)を(8.13)に代入して得られる関係

$$i\beta^N_l = \sum_{l'} \xi^{NN'}_{ll'}\overset{*}{\beta}{}^{N'}_{l'} \tag{8.26}$$

を$\xi^{NN'}_{ll'}$がみたす可き事とだけである。

(8.25)が実際(8.2.6)をみたす事は直ちに判るが(8.26)から逆に(8.23)は出て来ない。　而し空間共振器の開口が十分細く長くて一の姿態の波だけがcut offされずに問題となる場合而も空間共振器が純粋に空間的に働く様に(即ち各々の開口の間に直接の

相互作用がない様に)作られてゐる場合には‖ζ‖は対角線matrixになるであらうから其の時には(8.26)によつてζが完全に決定される事になる。即ちその場合には

$$ζ^{N'N} = δ_{N'N} \frac{i β^N}{β^N} \tag{8.27}$$

となり従つて特性matrixは(8.17)に之を代入して

$$a^{N'N} = \frac{β^{N'} \quad β^N}{\frac{ω}{Ω_C} - 1 + \frac{i}{2} \sum_{N''} |β^{N''}|^2} + δ_{N'N} \frac{i β^N}{β^N} \tag{8.28}$$

となり或は(6.16)の所で行つた様に

$$β = |β^N| e^{iθ_N} \tag{8.29}$$

なる記法を導入すると

$$a^{N'N} = \left\{ \frac{|β^{N'}| \, |β^N|}{\frac{ω}{Ω_C} - 1 + \frac{i}{2} \sum_{N''} |β^{N''}|^2} + i δ_{N'N} \right\} e^{i(θ^N + θ^{N'})} \tag{8.30}$$

を得る。以上ωが共振周波数$Ω_C$に近い時の特性matrixに就て個々の場合の計算を行はずに一般論だけからある程度の結論が得られる事を示した。 斯くして各管口の處で種々の管口條件が與へられた時各管口での波の振幅や位相がωの函数としてどう変化するかについて定性的な見通が得られる此處では余りに紙数が多くなつたからそれらの例について最早一々述べないで(8.30)を用ゐる一例として一つの口から波が入射した時に他の色々な口に「エネルギー」が如何に分配されるかといふ問題を次の節で論じ最終の節では更に一般の場合に付て空間内に蓄へられる「エネルギー」について調べて見る事にする

§9 「エネルギー」の分配

管口が十分細く長くて只一つの姿態だけがcut offされずにゐるものとし特性matrixが(8.30)の様に決定されてゐると N口から波が入射した時その入射「エネルギー」が各開口にどう分配されるかを論ずる事が出来る

(1.11)の規準化をやつてゐる結果として、その時N′口から管外に運ばれる「エネルギー」は一周期あてに

$$\begin{cases} |a^{N'N}|^2 = \dfrac{|\beta^{N'}|^2\,|\beta^{N}|^2}{\left(\frac{\omega}{\Omega_c}-1\right)^2+\frac{1}{4}\left(\sum_{N''}|\beta^{N''}|^2\right)^2} = \dfrac{\frac{1}{Q^{N'}}\quad\frac{1}{Q^{N}}}{\left(\frac{\omega}{\Omega_c}-1\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{Q}\right)^2} \\ |a^{N'N}|^2 = \dfrac{\left(\frac{\omega}{\Omega_c}-1\right)^2+\frac{1}{4}\left(\sum_{N''}|\beta^{N''}|^2-2|\beta^{N}|^2\right)^2}{\left(\frac{\omega}{\Omega_c}-1\right)^2+\frac{1}{4}\left(\sum_{N''}|\beta^{N''}|^2\right)^2} = \dfrac{\left(\frac{\omega}{\Omega_c}-1\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{Q}-\frac{2}{Q^{N}}\right)^2}{\left(\frac{\omega}{\Omega_c}-1\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{Q}\right)^2} \end{cases} \tag{9.1}$$

($N''=N$ に対して)

である事になる※ 斯くしてN口から入射した「エネルギー」が各口に分配され様子が判つた事になる。特に調度共振が起つて居る場合は

$$\begin{cases} |a^{N'N}|^2 = 4\dfrac{1}{Q^{N'}}\dfrac{1}{Q^{N}}\Big/\left(\dfrac{1}{Q}\right)^2 & (N' \neq N\text{の時}) \\ |a^{N'N}|^2 = \left(\dfrac{1}{Q}-\dfrac{2}{Q^{N}}\right)\Big/\left(\dfrac{1}{Q}\right)^2 & (N' = N\text{の時}) \end{cases} \tag{9.2}$$

で「エネルギー」の分配が與へられる。

斯くして我々の希望する分配を行はせるには回路が如何なるQ^Nである様に設計されればよいかと云ふ事がこの式で決定される事になる。例へばN口から入射した波が反射をせずに他の口に傳達されるためには

$$Q^N = 2Q \tag{9.3}$$

が成立する様にしておく必要がある等の事柄が(9.2)から結論されるのである。これが前の(6.25)の一般化である。但し実際問題に於ては管口條件が茲で考へてゐるものより複雑であらうが夫々の場合に應じて此處で行つた考察に似た吟味を行へばよいであらう。

茲で $\sum_{N'}|a^{N'N}|^2=1$ が成立してゐる事に注意せよ

§10 空洞内に蓄へられてゐる「エネルギー」

ω が共振周波数 Ω_c に近い時の特性 matrix の形が明かになつたから其の結果を用ひて空洞共振器が共振周波数の近くで作働してゐる時 その内に蓄へられてゐる「エネルギー」を調べて見る。但し茲では波の管口條件としては最も簡單なもの即ち N 口から ω なる(実数)の振動数をもつた l 波だけが入射してゐて他の口からは一切入射がないものとする。その時空間内に蓄へられてゐる「エネルギー」を ω の函数として求めるといふ問題を考へる。(但し ω は Ω_c に近いとする)。前に(7.4)の處で考へた様に

蓄へられた「エネルギー」 $W=\frac{1}{4}\iiint_V\{\mu(\mathbb{H}^{*}\mathbb{H})+\varepsilon(\mathbb{E}^{*}\mathbb{E})\}dV$

であるが茲で ω が実数として前の才二定理(3.4)を用ひて

$$=-\frac{i}{4}\lim_{\omega'\to\omega}\frac{1}{\omega-\omega'}\iint_S\{[\mathbb{E}\times\mathbb{H}'^{*}]_n+[\mathbb{E}'^{*}\times\mathbb{H}]_n\}dS$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{\partial}{\partial\omega'}\iint\{[\mathbb{E}\times\mathbb{H}'^{*}]_n+[\mathbb{E}'^{*}\times\mathbb{H}]_n\}dS\right]_{\omega'=\omega} \tag{10.1}$$

但し $\mathbb{E},\mathbb{H}$ としては與へられた管口條件の下のもの即ち $\mathbb{E}_l^N,\mathbb{H}_l^N$ を用ゐる其處で $\mathbb{E}_l^N,\mathbb{H}_l^N$ 及び $\mathbb{E}_l'^N$ に対して夫々(2.2)及び(2.2)で ω の所に ω' をおいたものを代入して

$$\iint_S\{[\mathbb{E}\times\mathbb{H}'^{*}]_n+[\mathbb{E}'^{*}\times\mathbb{H}]_n\}dS=\int_S\{[\mathbb{F}_l^{-}\times\mathbb{G}_l'^{*-}]_n+[\mathbb{F}_l'^{*-}\times\mathbb{G}_l^{-}]_n\}ds_l\, e^{-i(\kappa_l^N-\kappa_l'^{*N})z_N}$$
$$+a_{l'l}^{N'N}\iint\{[\mathbb{F}_l^{+}\times\mathbb{G}_l'^{*-}]_n+[\mathbb{F}_l'^{*-}\times\mathbb{G}_l^{+}]_n\}ds\, e^{i(\kappa_l^N+\kappa_l'^{*N})z_N}$$
$$+a_{l'l}'^{N'N}\iint_S\{[\mathbb{F}_l^{-}\times\mathbb{G}_l'^{*+}]_n+[\mathbb{F}_l'^{*+}\times\mathbb{G}_l^{-}]_n\}ds\, e^{-i(\kappa_l^N+\kappa_l'^{*N})z_N} \tag{10.2}$$
$$+\sum_{N'}\sum_{l'}a_{l'l}'^{*N'N}a_{l'l}^{N'N}\iint\{[\mathbb{F}_{l'}^{+}\times\mathbb{G}_{l'}'^{*+}]_n+[\mathbb{F}_{l'}'^{*+}\times\mathbb{G}_{l'}^{+}]_n\}ds\, e^{i(\kappa_{l'}^{N'}-\kappa_{l'}'^{*N'})z_N}$$

茲で a や $\mathbb{F},\mathbb{G}$ に $'$ をつけてあるものは ω' に関係するものを意味する。 そこで共振の近くを問題にするとして a として前節の(8.10)を用ゐる而して(8.11)で示された様に斯くして得られた $\varepsilon\omega$ について微分

する必要があるが、その時ω'がΩ_cの近くで変化する時にα'は急激な変化をなすに対して$\mathbb{F}'$や$\mathbb{G}'$やξ'等はω'の函数としてゆっくり変化するものである事に注意して$\frac{\partial \mathbb{F}'}{\partial \omega}$や$\frac{\partial \mathbb{G}'}{\partial \omega}$や$\frac{\partial \xi'}{\partial \omega}$等を$\frac{\partial \alpha'}{\partial \omega}$に対して無視すると二三計算の後

$$\mathbb{W} = -i\omega \sum_{N'}\sum_{\ell'} \frac{\Omega_c \beta^{*N}_{\ell} \beta^{*N'}_{\ell'}}{(\omega - \omega_c)^2} \left\{ \frac{\Omega_c \beta^{N'}_{\ell'} \beta^{N}_{\ell}}{\omega - \omega_c} + \xi^{N' N}_{\ell' \ell} \right\} \tag{10.3}$$

を得る。茲で(8.13)と(8.14)とを用ゐると

$$\mathbb{W} = \frac{\omega \Omega_c}{|\omega - \omega_c|^2} |\beta^N_\ell|^2 = \frac{\frac{\omega}{\Omega_c Q_\ell}}{\left(\frac{\omega}{\Omega_c} - 1\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{Q}\right)^2} \tag{10.4}$$

斯くしてωがΩ_cに近づくにつれて$\mathbb{W}$は急激に増加して調度$\omega = \Omega_c$に於て極大に達する。其の値は

$$\mathbb{W}_{\omega = \Omega_c} = \frac{4Q^2}{Q_\ell} \tag{10.5}$$

となる。　其くして次の結論を得る、N口からωなる周波数の単位振幅のℓ波が入射する時空洞内に蓄へられてゐる「エネルギー」はωが共振周波数Ω_cに近づくにつれて急激に増大してωが共振周波数をとる時極大に達する。

而してその極大値は(10.5)で與へられる。空洞内に蓄へられた「エネルギー」がωに対して(10.4)の如き関係にある事は空洞内の電磁界の強度がωに対して

$$|\mathbb{E}^N_\ell| |\mathbb{H}^N_\ell| \propto \sqrt{\frac{\omega / \Omega_c Q^N_\ell}{\left(\frac{\omega}{\Omega_c} - 1\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{Q}\right)^2}} \tag{10.6}$$

の様にωと共に変化する事を意味する。

§11 結び

以上個々の問題の細部には無関係に一般的考察だけからどの程度の結論が得られるかを長々と吟味した。而し勿論この一般論だけで立体回路論の役目が終った訳では決してなくて寧ろ実際の問題に当っては各論的計算が重心となるべき事は論をまたない。只此處で行った様な一般論がが若しその種の計算を行ったり或は又実験研究を行ったり又は漠然として定性的の構想をなす時に一種の指針となり、研究に方針を與へる原則の様なものとして役立てば幸である。更に幸にしてこの考察がそういふ役に立つものと假定すると差当って補って置かねばならない事は回路が完全導体のみから成るとしたこの理論の不完全さである「オーム」の抵抗に依る「エネルギー」損失を急場凌ぎに考慮に入れるには各開口に対して夫々Q_e^Nを考へた以外に「オーム」抵抗に依る損失に相当する見掛けの開口を一つ假想して、その開口に対するQをQ_{hm}とし、之をQ_e^Nと同一に取扱へば大体の事柄には差支へないだらう。

次に必要な事はもっと具体的な問題にこの一般論による方針を適用して、茲に導入した概念に依る取扱法が実際便利であるかどうかを試みる事である。この便不便の判定は今急に下されなくて将来をまたねばならない 之に関して宮島氏が「空洞と二線回路との結合」を論ぜられた時 特性matrix、漏洩定数或はQ_e^Nなどといふ概念を試みに用いられた事について筆者は感謝に堪えない。この二線路の場合には之等の概念と「インピーダンス」概念との間に関聯をつける事も可能であって宮島氏の論文はこの点にも言及されてある。以上で筆をおくことにするがこの論文には専門家諸氏からみて定めし

的はずれな議論が多かつたと思ひ茲にもう一度お許を乞ふ次第である

「終り」